

Polynômes à une indéterminée

Étude algébrique : définition d'un polynôme à une indéterminée à coefficients dans un corps K , vocabulaire, lois, notation définitive, degré d'une somme et d'un produit, structure de groupe de $(K[X], +)$, structure de sous-groupe de $K_n[X]$, structure d'anneau commutatif intègre de $(K[X], +, \times)$, éléments inversibles.

Définition de $K(X)$, propriétés, degré d'une fraction rationnelle. Composition des polynômes.

Divisibilité, polynômes associés, division euclidienne.

Polynômes irréductibles, cas de ceux de degré 1, existence de la décomposition d'un polynôme non constant en produit de polynômes irréductibles unitaires.

Étude analytique : fonction polynomiale, racines d'un polynôme, lien avec la divisibilité, nombre de racines d'un polynôme (sans multiplicité pour l'instant), condition suffisante de nullité pour un polynôme, identification entre polynôme et fonction polynomiale associée dans le cas d'un sous-corps de \mathbb{C} .

Ordre de multiplicité, lien avec la divisibilité, propriétés, un polynôme de degré n admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité.

Fonction rationnelle, racines et pôles, identification dans le cas d'un sous-corps de \mathbb{C} .

Dérivation des polynômes, propriétés, dérivé d'une somme, d'un produit et d'un composé, dérivations successives, formule de Leibniz ; formule de Taylor ; application aux racines multiples.

Polynômes scindés, corps algébriquement clos, théorème de d'Alembert-Gauss, factorisation en polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Question de cours à choisir parmi les suivantes :

Q1 : Degré d'une somme de deux polynômes et du produit par une constante, $K_n[X]$ est un sous-groupe de $(K[X], +)$.

Q2 : Degré d'un produit de deux polynômes. Intégrité et éléments inversibles de $K[X]$.

Q3 : Polynômes irréductibles, définition, cas du degré 1. Définition et caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine (sans la dérivée).

Q4 : Racines d'un polynôme, lien avec la division euclidienne, avec la divisibilité, généralisation, majoration du nombre de racines, condition de nullité.

Q5 : Énoncé de la dérivée n -ième de $(X - a)^k$, valeur en a . Formule de Taylor. Application de la formule de Taylor aux racines multiples.