

Intégration

Notion de subdivision d'un segment, subdivision équirépartie, relation d'ordre partielle, réunion de deux subdivisions ; fonctions en escalier sur un segment, subdivision adaptée, structure ; fonctions continues par morceaux sur un segment, propriétés ; approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

Intégrale des fonctions en escalier sur un segment : définition, notation $I_{[a,b]}(f)$, linéarité, croissance.

Intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment : définition à l'aide des intégrales de fonctions en escalier approchant f par valeurs inférieures et supérieures, notation $\int_{[a,b]} f$, lien avec la notion précédente, linéarité, croissance, inégalité de la moyenne, additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.

Critère de nullité ; inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité pour les fonctions continues.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux d'un point à un autre, propriétés, linéarité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Étude de $x \mapsto \int_a^x f$, continuité, dérivabilité en cas de continuité en un point de la fonction intégrée, conséquences ; étude de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ quand u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et f continue, sur des intervalles convenables, exemple.

Intégrales et primitives : propriétés des primitives sur un intervalle.

Intégration par parties, exemple des intégrales de Wallis. Théorème de Taylor reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, exemples, application à exp. Démonstration du théorème de Taylor-Young.

Changement de variable, exemples, applications à la parité, à l'imparité, à la périodicité.

Question de cours à choisir parmi :

Q1 : Critère de nullité.

Q2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité.

Q3 : Dérivabilité de $x \mapsto \int_a^x f$ à droite en un point où la fonction intégrée admet une limite à droite, énoncé des conséquences, y compris étude de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

Q4 : Intégrales de Wallis : définition, relation de récurrence, formule exacte avec des factorielles et des puissances, limite en coupant en deux.

Q5 : Théorème de Taylor-reste intégral. Énoncé de l'inégalité de Taylor-Lagrange. Exemple de exp.

Pour les colleurs : les méthodes de calcul de primitives via les décompositions en éléments simples ou les règles de Bioche, ainsi que les sommes de Riemann, seront au programme de la prochaine semaine.