Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire, isomorphisme canonique de $K-$espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E_n, F_p)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(K)$, justification du produit matriciel, conséquences, lien entre l'inversibilité d'une matrice carrée et la bijectivité d'une application linéaire qu'elle représente, application linéaire associée à une matrice, noyau, image et rang d'une matrice.

Utilisation de matrices colonnes pour calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire. Application à l'étude du noyau.

Matrices de vecteurs, condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit une base, matrices de passage, propriétés, changement de base pour une famille de vecteurs ou pour une application linéaire, cas particulier d'un endomorphisme, exemples.

Matrices semblables et équivalentes, caractérisation, exemples.

Trace d'un endomorphisme, linéarité, lien avec la composée, cas d'un projecteur.

Rang d'une matrice : lien avec le rang d'un système de vecteurs, caractérisation du rang à l'aide de l'équivalence avec $J_{mn}(r)$, rang d'une transposée.

Calcul du rang par la méthode du pivot de Gauss.

Question de cours obligatoire à choisir parmi les suivantes :

Q1 : Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E_n, F_p)$ et $\mathcal{M}_{pn}(K)$. Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice. Si $MN = I_n$ avec M et N carrées, alors M est inversible et $M^{-1} = N$.

Q2 : Justification du produit matriciel. Matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective. Formule $Y = MX$.

Q3 : Matrice de passage, énoncé des propriétés. Formule de changement de base pour un vecteur. Formule de changement de base pour une application linéaire, pour un endomorphisme.

Q4 : Trace d'un endomorphisme, propriétés, cas d'un projecteur. Rang d'une matrice, énoncé des propriétés. Définition et rang de $J_{mn}(r)$.

Q5 : Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{mn}(r)$. Rang d'une transposée.