Ensembles finis et dénombrement

Cardinal d'un ensemble fini, propriétés, condition nécessaire et suffisante d'égalité entre deux ensembles finis, équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application d'un ensemble fini dans un ensemble fini de même cardinal. Cardinal de la réunion d'un nombre fini d'ensembles finis deux à deux disjoints, de la réunion et du produit cartésien de deux ensembles finis.

Nombre d'applications de E_n dans F_p, cardinal de $\mathcal{P}(E_n)$.

Nombre de $p-$listes et de $p-$arrangements de E_n. Nombre d'applications injectives de E'_p dans E_n. Nombre de bijections de E'_n dans E_n.

Nombre de parties à p éléments de E_n, propriétés des coefficients binomiaux. Exemples de dénombrement.

Principe des bergers, application à $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$; principe des tiroirs.

Groupe symétrique

Généralités : définition et structure ; si E est de cardinal n, alors le groupe symétrique de E est isomorphe à $\mathcal{S}_n$, notation, vocabulaire.

Cycles et transpositions : orbite d'un élément selon une permutation, notion de cycle, exemples, propriétés, transpositions, décomposition d'une permutation en produit de transpositions.

Signature d'une permutation : définition à l'aide du nombre d'inversions, formule sous forme de produit, cas des transpositions, morphisme de groupes surjectif de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ sur $(\{-1, 1\}, \times)$, groupe alterné. Calcul pratique d'une signature à l'aide des orbites sur quelques exemples.

Question de cours obligatoire à choisir parmi les suivantes :

Q1 : Détermination du nombre d'applications de E_n dans F_p. Cardinal de $\mathcal{P}(E_n)$.

Q2 : Principe des bergers, application à $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Application du principe des tiroirs à l'approximation par un rationnel.

Q3 : Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.

Q4 : Définition de la signature d'une permutation. Signature des transpositions. Signature d'un cycle.