Lycée Kerichen
MPSI 2
2013-2014

Partie Mécanique
C3 Puissance et énergie

Les principes fondamentaux de la dynamique ou lois de Newton (Chapitre 2 Dynamique en référentiel galiléen) permettent d'établir les équations différentielles du mouvement, leur résolution fournit l'expression des variables en fonction du temps et ainsi une connaissance complète des mouvements futurs.
Toutefois, l'intégration des équations n'est pas toujours possible et dans ce cas, l'utilisation de constantes du mouvement permet tout de même une description partielle de l'évolution du système. Parmi ces constantes, il peut y avoir la quantité de mouvement (Chapitre 1), le moment cinétique (que nous étudierons au chapitre 5) et l'énergie mécanique qui est au cœur de ce chapitre.
Les raisonnements énergétiques permettront une étude plus ou moins complète du système mais en aucun cas ils n'apporteront plus d'information que la loi fondamentale de la quantité de mouvement.
Les théorèmes établis dans ce chapitre découlent en effet des principes fondamentaux.
Sur le fond, vous pourriez vous dire "il n'y a rien de neuf" : en effet, il ne s'agit que d'une mise en forme différente de ce qui a déjà été postulé; ce qui permettra **dans certains cas** d'appréhender plus rapidement et plus efficacement le comportement du système.

I-Puissance et travail:

1. Puissance:

a) Définition :

Un point M animé d'une vitesse $\overrightarrow{v(M)_{\Re}}$ dans $\Re$ est soumis à l'action d'une force $\vec{F}$.

Cette action s'accompagne d'un transfert d'énergie.

La puissance de la force $\vec{F}$ appliquée au point M à l'instant t est telle que :

La puissance P s'exprime en ………………..

La puissance représente l'énergie transférée au point M par unité de temps sous l'effet de la force $\vec{F}$.

<u>Exemple :</u> Les frottements (fluides ou solides) contribuent à faire diminuer la vitesse (donc l'énergie cinétique)

<u>Remarque :</u>

1. Attention !!! $\overrightarrow{v(M)_{\Re}}$ dépend du référentiel choisi : la puissance ………………………………………………………….

b) Cas possibles:

- P= 0 : => $\vec{F}$ $\overrightarrow{v(M)_{\Re}}$

  $\vec{F}$ ne communique pas d'énergie au système: on parle de force "passive"
- **P>0 : =>** $\vec{F}$ et $\overrightarrow{v(M)_{\Re}}$ ....

  P = ...

  M ....de l'énergie de $\vec{F}$.
- **P<0 : =>** $\vec{F}$ et $\overrightarrow{v(M)_{\Re}}$ ....

  P = ...

  M ....de l'énergie.

  Exemple:

2. Travail :

a) Déplacement élémentaire :

Soit un point M en mouvement dans $\Re$.

A t, on a $\overrightarrow{OM}$

A t' = t + dt, on a $\overrightarrow{OM'}$: durant l'intervalle de temps infinitésimal dt,le point M s'est déplacé de $\overrightarrow{MM'}$ =

- <u>En coordonnées cartésiennes :</u>

- <u>En coordonnées cylindriques :</u>

b) Travail élémentaire :

<u>Définition :</u> Entre t et t + dt, l'action de la force $\vec{F}$ sur le point M s'accompagne généralement d'un « petit « transfert d'énergie appelé travail élémentaire noté δW et tel que $\delta W = P.dt$.

<u>Unités</u> :

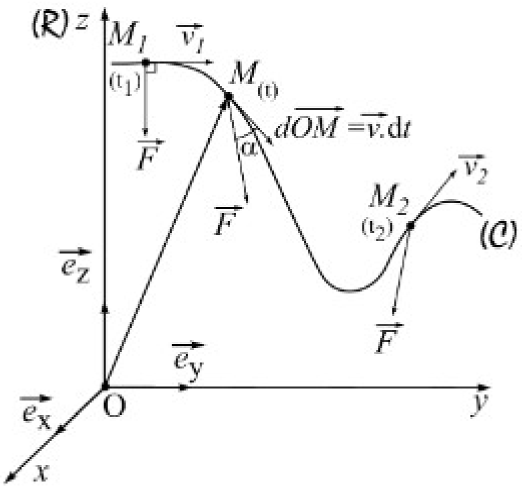
δW =   • Si δW > 0 : le travail est .... : le système reçoit de l'énergie • Si δW < 0 : le travail est .... : le système cède de l'énergie • Si δW = 0 : la force ....

c) Travail sur une trajectoire finie :

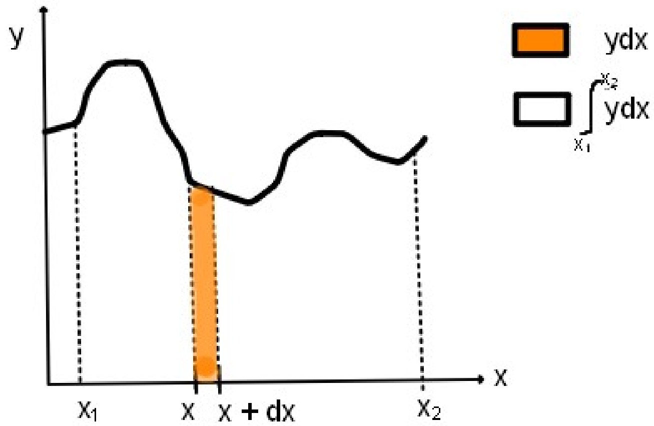
« Trajectoire finie » = somme de « petites » trajectoires élémentaires

Entre deux instants t_1 et t_2, l'action de la force $\vec{F}$ sur un point s'accompagne généralement d'un transfert d'énergie appelé « travail » et noté W.

W = somme des δW de M_1 à M_2



Rappel:



Propriété: $W=\int_{M_1}^{M_2} \delta W=\int_{M_1}^{M_2} P\,dt=\int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\,d\,\overrightarrow{OM}$

Le travail **dépend** a priori **du chemin choisi** pour aller d'un point M_1 à M_2.

Cas particulier : Lorsque $\vec{F}$ est un vecteur contant (direction, sens, norme), alors :

Dans ce cas, le travail est .... du chemin suivi.

Exemple :

II- Énergie cinétique :

1. Théorème de la puissance cinétique:

Pour un point M en mouvement dans $\Re$ soumis à un ensemble de forces $\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=\frac{d\,m\vec{v}}{dt}$, calculons la puissance P_R de toutes les forces appliquées en M:

$$\boxed{P_{\Re}=\frac{d\,E_c}{dt}}$$

2. Théorème de l'énergie cinétique :

- **Sur un déplacement infinitésimal**, $\delta W_{\Re}(\vec{R}) = P(\vec{R})\,dt = \frac{d\,E_c}{dt}.dt = d\,E_c$

  dE_c est ....
  .
- **Sur une trajectoire finie**, $W_{\Re}(\vec{R}) = \Delta\,E_c = E_{c2} - E_{c1}$

<u>Intérêt</u> : Les forces $\vec{F}$ perpendiculaires au déplacement ont un travail W nul.

<u>Exemple</u> :

3. Exercice d'application :

On reprend l'exercice d'Aputik l'esquimau qui est remonté sur l'igloo et qui se remet à glisser du sommet.

Si on néglige les frottements (Aputik glisse sur une mince épaisseur d'eau liquide qui résulte de la fonte de la glace) la réaction du support est ....

Quelle est l'énergie cinétique de l'esquimau pour un angle θ ?

Conditions initiales : θ(0) = 0 et $\dot{\theta}(0) = 0$

III- Énergie potentielle dans les problèmes à un degré de liberté :

1. Mouvement à un degré de liberté:

La position du système peut être déterminée à l'aide d'un seul paramètre.

Exemple :

2. Exemple :

Considérons un point matériel M subissant dans un référentiel $\Re$ une force $\overrightarrow{F_0}$ constante en norme et en direction.
Dans ce cas, le travail de la force $\overrightarrow{F_0}$ est : $W_{\overrightarrow{F_M}}$ =

Pour un déplacement M_1M_2, on a $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM}_1$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM}_2$

Exemple : force de pesanteur terrestre dans le cas où le déplacement est suffisamment restreint pour que l'on puisse considérer $\vec{g}$ constant en norme et en direction.
L'axe vertical Oz étant vertical ascendant.
$W_{\overrightarrow{P_M}}$ =

Le travail est donc ....lorsque M descend.

Pour une transformation infinitésimale, $\delta W = -mg\,dz$. On peut dire qu'il existe une fonction f(z) = -mgz qui ne dépend que de la position telle que la variation infinitésimale de la fonction soit opposée au travail élémentaire de la force sur le déplacement de M_1 à M_2.

3. Généralisation : Force conservative et énergie potentielle :

Définition : La force $\overrightarrow{F_C}$ exercée sur un point M est conservative si, lors d'un déplacement quelconque de M (dans $\Re$), le travail de la force $\overrightarrow{F_C}$ est l'opposé de la variation d'une grandeur scalaire appelée « énergie potentielle » et notée $E_p(M)$ qui **ne dépend que de la position** de M.

$$\delta W_{\overrightarrow{F_C}}(M) = -dE_p(M)$$

Unité :

Remarques :

1. **Sur un déplacement fini**, où M passe de M_i à M_f,
$$W_{\overrightarrow{F_C}}(M) = -\Delta E_p(M) = E_p(M_i) - E_p(M_f)$$
2. Par définition, **ΔE_p et δE_p ne dépendent que de la position du système**
3. Seules les **variations** d'énergie potentielle ont un sens!!
4. L'origine , le point d'énergie potentielle nulle est toujours arbitraire (sans importance physique)
5. Une force conservative peut être vue comme un réservoir d'énergie potentiellement libérable

4. Lien avec la puissance :

$$\delta W_{\overrightarrow{F_C}}(M) = -dE_p(M)$$ (pour toute force conservative)

s'écrit :

<u>Remarque</u> : On dit que **la force** $\overrightarrow{F_C}$ **dérive d'une énergie potentielle** même si c'est la puissance des forces qui vaut la dérivée de l'énergie potentielle.

IV- Théorème de l'énergie mécanique :

1. Énoncé:

Considérons un point M soumis à un ensemble de forces conservatives ou non que l'on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}(M) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{iC}}(M) + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{iNC}}(M)$$ (somme des forces conservatives et non conservatives)

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\left(\frac{dE_c}{dt}\right)_{\Re} = P(\overrightarrow{F_C}(M)) + P(\overrightarrow{F_{NC}}(M))$$

On a $P(\overrightarrow{F_C}(M)) = -\left(\frac{d\sum E_p}{dt}\right)_{\Re}$

On peut écrire :

On définit alors $E_m = E_c + \sum E_p$

$$\frac{d\,E_m}{dt} = P_{\overrightarrow{F_{NC}}}(M)$$

<u>Remarque :</u>

- $\frac{d\,E_m}{dt} = P_{\overrightarrow{F_{NC}}}(M)$ instantanée
- $dE_m(M) = \delta W_{\overrightarrow{F_{NC}}}(M)$ déplacement infinitésimal
- $\Delta E_m = W_{\overrightarrow{F_{NC}}}(M)$ déplacement fini

Ainsi, un point matériel M en mouvement par rapport à un référentiel $\Re$ peut stocker de l'énergie sous 2 formes:

- cinétique (lié à la vitesse)
- potentielle (lié à la position)

Pour faire varier cette énergie mécanique, on doit fournir au système des travaux de forces non conservatives.

<u>Remarque :</u> Comme l'énergie potentielle, l'énergie mécanique est définie à une constante près.

Attention !!! Il ne faut pas compter 2 fois une force : en tenant compte de son énergie potentielle et en calculant son travail comme si elle n'était pas conservative !

2. Intégrale première de l'énergie :

Cas particulier : Toutes les forces sont conservatives : il n'y a pas de puissance ou de travail des forces non conservatives.
L'énergie mécanique ne varie pas.

$P_{FNC} = 0 \Rightarrow E_m = cste$:
Cette énergie mécanique constante est désignée sous le nom « intégrale première de l'énergie ».
Pourquoi ce terme ?
L'énergie mécanique ne dépend que de la position (énergie potentielle) et des dérivées premières (vitesse dans l'énergie cinétique). Elle ne dépend pas des dérivées seconde de la position (comme c'est le cas en utilisant la loi de la quantité de mouvement.
La résolution de l'équation différentielle du premier ordre est plus aisée que celle du second ordre obtenue grâce à la loi de la quantité de mouvement.

$\frac{1}{2}mv^2+E_p(M)=\frac{1}{2}mv_0^2+E_p(M_0)$ En dérivant cette expression, on revient à l'équation différentielle permettant d'obtenir la position.

3. Exemples de forces conservatives :

a) Pesanteur terrestre et gravitation :

b) Force de rappel élastique :

c) Force électrostatique :

4. Application :

a) Esquimau sur l'igloo

b) Étude d'un ressort :

V- Équilibre d'un point matériel soumis à des forces :

Cette année, nous allons toujours travailler sur des systèmes à **1 degré de liberté** (variable : x, y, z, θ ou r)

1. Condition d'équilibre :

Soit un point M soumis à une force $\vec{F}$ dérivant d'une énergie potentielle et s'exprimant selon $\vec{e}_x$

$$dE_p=-\delta W=-\vec{F}.\vec{dl}=-F.dx$$

On a équilibre en x = $x_{éq}$ lorsque $F(x_{éq})=-\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{(x=x_{éq})}=0$

L'équilibre nécessite une énergie potentielle extrémale.

2. Stabilité de l'équilibre :

Regardons ce qui se passe si l'on se déplace très légèrement de la position x = $x_{éq}$,.

Pour ce faire, on va effectuer un développement limité au premier ordre de la force $\vec{F}$ prise algébriquement. Mais avant toute chose, qu'est-ce qu'un développement limité ?

a) <u>Point cours sur les développements limités:</u>

Effectuer un développement limité de la fonction f(x) au voisinage de x = a consiste à approximer le fonction par :

$$f(x)=f(a)+\alpha_1(x-a)+\alpha_2(x-a)^2+\alpha_3(x-a)^3 f^{(3)}(a)\ldots\alpha_n(x-a)^n+(a)+o(x-a)^n$$

<u>Remarque :</u> $o(x-a)^n$ signifie que tous les termes suivants sont négligeables devant $o(x-a)^n$ lorsque x-> a

Pour une fonction f(x) n fois dérivable, au voisinage de x = a, en effectuant un développement de Taylor-Young

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a)+\frac{1}{3!}(x-a)^3 f^{(3)}(a)\ldots\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)+o(x-a)^n$$

Exemple: au voisinage de x= 0:

sin(x) =

b) Stabilité de l'équilibre :

$$F(x)=F(x_{éq})+(x-x_{éq})\left(\frac{dF}{dx}\right)_{(x=x_{éq})}+o(x-x_{éq})$$

Sachant que $F(x_{éq})$ = …. et $\frac{dF}{dx}$ =

on en déduit :

L'équilibre est stable lorsque la force $\vec{F}$ a tendance à ……………………… le système en $x = x_{éq}$ (instable dans le cas inverse).

Ainsi : en M_1 tel que $x_1 > x_{éq}$, l'équilibre stable exige **F_1 0**.

Schéma :

Or, $x_1 - x_{éq}$ 0 et $-(x_1 - x_{éq})$ 0

On en déduit donc :

Équilibre stable :

Équilibre instable:

Remarque : On peut adopter un raisonnement mathématique :

x	$x_{éq}$
$\frac{d^2E_p}{dx^2}$	
$\frac{dE_p}{dx}$	
E_p	

x	$x_{éq}$
$\dfrac{d^2 E_p}{dx^2}$	
$\dfrac{d E_p}{dx}$	
E_p	

3. Diagramme d'énergie potentielle :

VI-Approximation harmonique :

1. Définition :

On dit qu'un système se comporte comme un oscillateur harmonique c'est-à-dire un système dont le mouvement x(t) est solution de $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ lorsque l'on se limite aux petits mouvements autour de la position d'équilibre.
On parle d' « **approximation harmonique** ».

2. Démonstration :

Soit un point matériel M de masse m, en mouvement sur l'axe $(O, \vec{e}_x)$ dans $\Re$ soumis à une force conservative $\vec{F}_C = F_C \vec{e}_x = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)\vec{e}_x$

Si la position $x_{éq}$ = est **une position d'équilibre stable**, on a vu que $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{(x=x_{éq})} = 0$ et donc $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{(x=x_{éq})} = k > 0$

Appliquer l'approximation harmonique au système consiste à assimiler $E_p(x)$ au voisinage de l'équilibre à son développement limité à l'ordre 2 (développement de Taylor-Young) :

$$E_p(x) = E_p(x_{éq}) + (x - x_{éq})\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{(x=x_{éq})} + \frac{1}{2}(x - x_{éq})^2\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{(x=x_{éq})} =$$

Dans le cadre de l'approximation harmonique,

$$E_p(x) = E_p(x_{éq}) + \frac{1}{2}(x - x_{éq})^2 k$$