

Mécanique

C6 Loi du moment cinétique appliquée au solide

Avant de démarrer les exercices qui suivent, assurez-vous de maîtriser :

- la loi du moment cinétique appliquée à un solide en rotation par rapport à un axe fixe
- la notion de moment d'inertie
- la notion de couple
- le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un solide
- la notion de liaison pivot parfaite et ce que cela implique au niveau du moment de cette liaison

Exercice 1: Ecartez-vous!

Au plus fort de la tempête du 23 décembre 2013, une haie de cyprès n'a pu résister aux rafales . Tous les arbres se sont alors couchés les uns contre les autres. Tous les arbres ... sauf un.

Mais, ce cyprès « déplumé » présente désormais un danger pour les riverains car il est situé en bordure de route. Il faut donc l'abattre.

On assimile cet arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m .

L'équipe d'élagage scie l'arbre à la base du tronc et, ce qui aurait dû être évité se produit : l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas. On repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

A $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile.

Données : Moment d'inertie de l'arbre par rapport à son extrémité : $J = \frac{1}{3} m L^2$

$$g = 10 \text{ m.s}^{-2} \text{ et pour } \theta_0 = 5^\circ, \quad \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} \right) = 5,1$$

1. Établissez l'équation du mouvement de la chute de l'arbre.
2. Montrez que lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire est

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}$$

3. Déterminez le temps de chute de cet arbre de 30 m.

Exercice 2 : Creusez-vous les méninges !

Rempli de bonnes intentions, Maxime a préparé le dîner. Au menu, toasts aux rillettes et au tarama, œufs mimosa en entrée suivis de paupiettes de veau et pour terminer un tiramisu .

Mais, étourdi, il a posé un œuf cuit à côté d'un cru et il est bien incapable de les distinguer.

1. Si vous vous étiez fourré dans cette situation, comment vous en sortiriez-vous ?

Exercice 3 : Et zut, encore du mauvais côté...

Encore contrarié de son inattention que lui a coûté un temps précieux, Maxime ne prend pas garde aux toasts qui dépassent du plat et son coude en fait basculer un.

Devinez de quel côté il s'écrase...

Modélisons cette affaire :

On considère un toast homogène (longueur $2a$, largeur $2b$, épaisseur $2c$ et masse m) qui est poussé très délicatement vers le bord du plat. Quand le milieu du toast atteint le bord O du plat, le toast amorce une rotation autour de l'arête Oy .

L'action du plat est modélisée par une force $\vec{R} = T\vec{e}_\theta + N\vec{e}_r$ appliquée en O . On note θ l'angle entre la tartine et l'horizontale.

Données : moment d'inertie du toast selon Oy : $\frac{1}{3}m(a^2 + 4c^2)$

Le plat dans lequel est le toast dépasse du bord d'une table de hauteur $H = 70$ cm

1. Faire un schéma de la situation en y faisant figurer les forces ainsi que les vecteurs cités et le repère utilisé.
2. A l'aide d'une approche énergétique, exprimer $\ddot{\theta}$ en fonction de θ ainsi que $\dot{\theta}$ en fonction de θ .
3. Retrouver l'expression de $\ddot{\theta}$ en fonction de θ à l'aide de la loi du moment cinétique.
4. a) A l'aide de la loi de la quantité de mouvement, exprimer $\vec{T}$ et $\vec{N}$.
b) Simplifier les expressions avec $a = 4$ cm et $c = 0,4$ cm.
c) En admettant que lorsque la tartine ne glisse pas, on a la relation $|\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}|$ où μ_s est le coefficient de frottement statique valant 1 ici, déterminer à partir de quel angle θ_0 , la tartine commence à glisser.
5. A partir de cet instant pris comme origine, le toast quitte le plat en un temps très bref en conservant la même orientation θ_0 et à la même vitesse angulaire.
Quelle est (après avoir quitté le plat) la loi d'évolution de $z_G(t)$ où G est le barycentre de la tartine ?
6. Déterminer le temps t_s pour lequel le toast touche le sol en admettant que la vitesse initiale est très inférieure à la vitesse finale.
7. On admet que pendant la chute libre, la vitesse angulaire reste égale à ω_0 .
a) Quelle est son expression ?
b) Application numérique.
8. De quel côté tombe la tartine ? On admettra qu'il n'y a pas de rebond.
9. Que faudrait-il modifier dans la cuisine de Maxime (et dans de nombreuses cuisines) pour éviter ce genre de désagréments ?

Quelques résultats:

Exercice 1: 2) $J_\Delta \ddot{\theta} = \frac{L}{2} mg \sin(\theta)$ et $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{-3g}{L}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$ durée de chute : 5,1 s

Exercice 3: 2) $\ddot{\theta} = \frac{3gc}{a^2 + 4c^2} \sin(\theta)$ 3) $J \ddot{\theta} = mgc \sin(\theta)$ 4) $N \simeq mg \cos(\theta)$ $T \simeq -mg \sin(\theta)$

$$7) \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{6gc(1 - \cos(\frac{\pi}{4}))}{a^2 + 4c^2}}$$