LES NOMBRES

Vocabulaire des lois de composition interne

Dans cette partie E est un ensemble et $(x,y,z,t)\in E^4$.

• Une loi de composition interne $\star$ (abrégée en lci) est une application f de $E\times E$ dans E qui est notée $x\star y=f(x,y)$.

$*$ L'addition est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, et la soustraction est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{lll} +:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N} & +:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z} & -:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z} \\ \quad (x,y)\longmapsto x+y & \quad (x,y)\longmapsto x+y & \quad (x,y)\longmapsto x-y \end{array}$$

Au contraire la soustraction n'est pas une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$: $2-3$ n'est pas défini dans $\mathbb{N}$.

$*$ La loi de composition interne $+$ sur $\mathbb{N}$ peut s'écrire avec le quantificateur universel $\forall$ se lisant *quel que soit...* ou *pour tout...*; la négation montrant que la soustraction n'est pas une loi de composition interne fait intervenir le quantificateur existentiel $\exists$ se lisant *il existe...* par exemple avec $x=2$ et $y=3$:

$$\forall\, x\in\mathbb{N}\quad \forall\, y\in\mathbb{N}\quad x+y\in\mathbb{N} \qquad\qquad \exists\, x\in\mathbb{N}\quad \exists\, y\in\mathbb{N}\quad x-y\notin\mathbb{N}$$

• Les lois de composition interne peuvent être caractérisées par les propositions suivantes :

commutative	$\forall\,(x,y)\in E^2$	$x\star y=y\star x$
associative	$\forall\,(x,y,z)\in E^3$	$x\star(y\star z)=(x\star y)\star z$
$e\in E$ est un élément neutre	$\forall\, x\in E$	$x\star e=e\star x=x$
$u\in E$ est un élément régulier	$\forall\,(x,y)\in E^2$	$x\star u=y\star u\Longrightarrow x=y$
	ET	$u\star x=u\star y\Longrightarrow x=y$
$a\in E$ est un élément absorbant	$\forall\, x\in E$	$x\star a=a\star x=a$

$*$ L"addition $+$ et la multiplication $\times$ de nombres sont des lois commutatives et associatives ; au contraire la puissance ^ de nombres n'est ni commutative ni associative car il existe des nombres pour lesquels les égalités ne sont pas vérifiées :

$$x+y=y+x \qquad x\times y=y\times x \qquad 2^3=8\neq 3^2=9$$
$$x+(y+z)=(x+y)+z \qquad x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$$
$$2^{(3^2)}=2^9=512\neq\left(2^3\right)^2=8^2=64$$

$*$ Le nombre 0 est élément neutre pour l'addition, et le nombre 1 est élément neutre pour pour la multiplication :

$$x+0=0+x=x \qquad 1\times x=x\times 1=x$$

$*$ L'associativité de la loi $\star$ rend cohérente la notation sans parenthèse $x\star y\star z$ à la place $(x\star y)\star z=x\star(y\star z)$.
L'associativité s'étend à un nombre quelconque de termes en les regroupant trois par trois :

$$(\underline{x}\star\underline{y})\star\underline{(z\star t)}=x\star(y\star(z\star t))=x\star((y\star z)\star t)=x\star(y\star z)\star t$$

• La loi $\star$ est dite régulière lorsque tout élément de E est régulier.

$*$ Tout nombre u est régulier pour l'addition, et tout nombre v non nul est régulier pour la multiplication :

$$u+x=u+y\Longrightarrow x=y \qquad v\neq 0 \text{ ET } v\times x=v\times y\Longrightarrow x=y$$

$*$ Le nombre 0 est élément absorbant pour la multiplication et n'est pas régulier :

$$0\times x=x\times 0=0 \qquad 1\times 0=2\times 0=0 \text{ ET } 1\neq 2$$

• La loi $\star$ est distributive par rapport à la loi de composition interne $\perp$ à cette condition :

$$\begin{array}{ll} \forall\,(x,y,z)\in E^3 & x\star(y\perp z)=(x\star y)\perp(x\star z) \\ & \text{ET } (x\perp y)\star z=(x\star z)\perp(y\star z) \end{array}$$

$*$ La multiplication $\times$ est distributive par rapport à l'addition $+$; la puissance n'est pas distributive par rapport à la multiplication, elle est distributive à gauche et n'est pas distributive à droite :

$$x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z) \qquad (x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$$
$$(x\times y)^z=(x^z)\times(y^z) \qquad 2^{2\times 3}=2^6=64\neq(2^2)\times(2^3)=4\times 8=32$$

• Lorsque $e\in E$ est élément neutre pour la loi $\star$, l'élément $\widetilde{x}\in E$ est symétrique de $x\in E$ si et seulement si $x\star\widetilde{x}=\widetilde{x}\star x=e$.
Dans ce cas x est dit inversible pour la loi de composition interne $\star$.

$*$ Le nombre entier $-3\in\mathbb{Z}$ est le symétrique de 3 pour l'addition dans $\mathbb{Z}$; de même le nombre rationnel $1/3 \in \mathbb{Q}$ est le symétrique de 3 pour la multiplication dans $\mathbb{Q}$:

$$3 - 3 = 0 \qquad 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

Au contraire le nombre entier $3 \in \mathbb{Z}$ n'a pas de symétrique pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$: l'équation $3 \times x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

★ La commutativité de la loi $\star$ permet de définir la régularité, l'élément neutre, l'élément absorbant, le symétrique et la distributivité par une seule égalité à la place de deux.
Si au contraire la loi $\star$ n'est pas commutative, alors les deux égalités des définitions sont nécessaires.

▹ L'élément neutre pour la loi $\star$ sur E, s'il existe, est unique.

▹▹ Notons $e \in E$ et $e' \in E$ des élements neutres de $\star$ sur E :

$$\forall x \in E \quad \underline{e \star x} = x \star e = \underline{x}$$
$$\forall y \in E \quad e' \star y = \underline{y \star e'} = \underline{y}$$

La première égalité est valable pour tout $x \in E$, en particulier si $x = e'$, et la seconde pour tout y, par exemple $y = e$, ainsi :

$$e' = e \star e' = e$$

Cette égalité $e = e'$ démontre l'unicité, s'il existe, de l'élément neutre.

▹ Le symétrique d'un élement x d'une loi $\star$ associative sur E ayant un élément neutre noté e, s'il existe, est unique.

▹▹ Notons $\tilde{x}$ et $\hat{x}$ des symétriques de x, montrons $\tilde{x} = \hat{x}$. Les hypothèses sont donc les suivantes :

$$\tilde{x} \star x = x \star \tilde{x} = e \qquad \hat{x} \star x = x \star \hat{x} = e$$

La démonstration repose sur l'associativité :

$$\hat{x} = e \star \hat{x} = (\tilde{x} \star x) \star \hat{x} = \tilde{x} \star (x \star \hat{x}) = \tilde{x} \star e = \tilde{x}$$

Opérations sur les nombres réels

Propriétés de l'addition et de la multiplication

Le premier paragraphe ci-dessous énumère sans les démontrer les propriétés de base des nombres réels, et les suivants justifient les autres propriétés des opérations sur $\mathbb{R}$ à partir de celles-là.

Dans la suite de cette partie x, y, z et t sont des nombres réels, n est un entier naturel, et $(x_k)_{k=1}^n$ et $(y_k)_{k=1}^n$ sont deux familles finies de nombres.

Propriétés de base des opérations

■ L'addition $+$ est une loi de composition interne commutative et associative dont l'unique élément neutre est 0.
Tout nombre réel x possède un unique symétrique pour l'addition, il est appelé opposé de x et est noté $-x$.

■ La multiplication $\times$ est une loi de composition interne commutative, associative et d'unique élément neutre $1 \neq 0$.
Tout nombre réel x non nul possède un unique symétrique pour la multiplication, il est appelé inverse de x et est noté $1/x$.
La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

∗ Ces propriétés caractérisent la structure de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Opposés et inverses

⊠ L'addition est une loi de composition régulière sur $\mathbb{R}$.
Tout élément inversible est régulier pour la multiplication.

◊ Additionner l'opposé $-x$ démontre que x est régulier pour l'addition :

$$\begin{aligned} x + y = x + z &\Longrightarrow (-x) + (x + y) = (-x) + (x + z) \\ &\Longrightarrow ((-x) + x) + y = ((-x) + x) + z \\ &\Longrightarrow y = 0 + y = 0 + z = z \end{aligned}$$

La commutativité de l'addition évite la preuve de l'autre implication :

$$\begin{aligned} x + z = y + z &\Longrightarrow z + x = z + y \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

◊ Si x est inversible, l'hypothèse $xy = xz$ entraîne $y = z$:

$$\begin{aligned} x \times y = x \times z &\Longrightarrow \frac{1}{x} \times (x \times y) = \frac{1}{x} \times (x \times z) \\ &\Longrightarrow \Big(\frac{1}{x} \times x\Big) \times y = \Big(\frac{1}{x} \times x\Big) z \\ &\Longrightarrow y = z \end{aligned}$$

La commutativité de la multiplication entraîne l'autre implication.

■ Ce formulaire traduit les propriétés générales des éléments neutres et des symétriques pour l'addition et de la multiplication :

$$-0=0 \qquad -(-x)=x \qquad -(x+y)=(-x)+(-y) \text{ abrégé en } -x-y$$
$$\frac{1}{1}=1 \qquad \frac{1}{\frac{1}{x}}=x \qquad \frac{1}{x\times y}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{y} \quad \text{pour } x \text{ et } y \text{ non nuls}$$

◊ L'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication prouve ces propriétés, par exemple :

$$(x\times y)\times(\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}) = (\frac{1}{x}\times\frac{1}{y})\times(x\times y)$$
$$=(x\times\frac{1}{x})\times(y\times\frac{1}{y}) = 1\times 1 = 1 \qquad \text{donc } \frac{1}{x}\times\frac{1}{y}=\frac{1}{x\times y}$$

La suite du cours utilise les notations algébriques habituelles ; le signe $\times$ peut être omis dans un produit, par exemple $xy = x\times y$, et la multiplication est prioritaire sur l'addition comme dans l'égalité $xy+zt=(xy)+(zt)$.

■ Le nombre 0 est absorbant pour le produit, n'est pas régulier et n'a pas d'inverse :

$$\frac{1}{x}\neq 0 \quad \text{pour tout } x\neq 0 \qquad xy=0 \iff (x=0 \text{ OU } y=0)$$

◊ L'égalité $0\times x=0$ provient du fait que 0 est élément neutre pour l'addition associé à la régularité de la somme :

$$\underline{0}+0x=0x=(0+0)x=\underline{0x}+0x \Longrightarrow 0=0x$$

◊ L'égalité $0\times 1=0\times 0=0$ prouve que le nombre 0 n'est pas régulier pour la multiplication car $1\neq 0$.

◊ La propriété qui énonce que *tout élément inversible est régulier pour la multiplication* justifie donc 0 n'est pas inversible car 0 n'est pas régulier.

◊ Si $x=0$ ou $y=0$ alors $x\times y=0$ car le nombre 0 est absorbant :

$$x=0 \text{ OU } y=0 \Longrightarrow x\times y=0$$

Réciproquement si $x\neq 0$ et $y\neq 0$ alors x et y sont inversibles, donc $x\times y$ admet un inverse et par conséquent $x\times y\neq 0$. Cette implication est la contraposée de l'implication recherchée obtenue à partir des négations et de l'échange des deux termes de l'implication ; ces deux

implications sont logiquement équivalentes :

$$\begin{array}{ll} & x\neq 0 \text{ ET } y\neq 0 \Longrightarrow x\times y\neq 0 \\ \text{c'est-à-dire} & \text{NON}\,(x\times y\neq 0) \Longrightarrow \text{NON}\,(x\neq 0 \text{ ET } y\neq 0) \\ \text{c'est-à-dire} & x\times y=0 \Longrightarrow x=0 \text{ OU } y=0 \end{array}$$

∗ Aucun calcul ne peut être fait avec l'inverse de 0 qui n'est pas défini.

▹ Résolution de l'équation $a^2x+1=a+x$ d'inconnue réelle x en fonction du paramètre $a\in\mathbb{R}$.

⊳⊳ L'ensemble des solutions est noté $\mathcal{S}$:

$$a^2x+1=a+x \iff (a^2-1)x=a-1$$
$$\begin{array}{lll} \text{Si } a=1: & 0=0 \text{ est valable pour tout } x & \mathcal{S}=\mathbb{R} \\ \text{Si } a=-1: & 0=-2 \text{ est sans solution} & \mathcal{S}=\emptyset \\ \text{Si } a\neq\pm1: & \text{une seule solution } x=\dfrac{a-1}{a^2-1}=\dfrac{1}{a+1} & \mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{a+1}\right\} \end{array}$$

Opposé d'un produit

■ Ces égalités usuelles découlent de la distributivité et de la régularité :

$$-(x\times y)=(-x)\times y=x\times(-y) \qquad -x=(-1)\times x$$

◊ La régularité de l'addition et la distributivité de la multiplication prouvent les premières égalités :

$$\left\{\begin{array}{l} x\times y+\underline{(-(x\times y))}=0 \\ =0\times y=(x+(-x))y=x\times y+\underline{(-x)\times y} \\ =x\times 0=x(y+(-y))=x\times y+\underline{x\times(-y)} \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow -(x\times y)=(-x)\times y=x\times(-y)$$

Le valeur particulière $y=1$ justifie $-x=(-1)x$.

Puissances d'exposant entier

• Dans le cas où $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$ les puissances d'exposant entier sont définies ainsi, sauf 0^p qui n'est pas défini si $p<0$:

$$x^p=\left\{\begin{array}{rl} x\times x\times x\times\cdots\times x & \text{produit de } p \text{ facteurs pour } p>0 \\ 1 & \text{pour } p=0, \text{ y compris } 0^0=1 \\ \dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}\times\cdots\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^{-p}} & \text{pour } p<0, \text{ sauf si } x=0 \end{array}\right.$$

■ Le nombre de termes de ces produits se traduit par ces égalités :

$$(xy)^p = x^p y^p \quad x^p x^q = x^{p+q} \quad (x^p)^q = x^{pq} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^p = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$$

◊ Une démonstration rigoureuse de ces égalités s'effectue par récurrence sur p ou q en distinguant selon que les exposants sont positifs ou négatifs.

∗ La notation x^{p^q} signifie $x^{(p^q)}$; au contraire $(x^p)^q = x^{pq}$.

∗ Les formules habituelles des puissances entières $p \in \mathbb{Z}$ de -1 découlent de l'égalité $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$:

$$(-1)^p = (-1)^{p\pm 2} = (-1)^{3p} = (-1)^{-p} = -(-1)^{p\pm 1}$$
$$(-1)^{2p} = 1 = (-1)^0 \qquad (-1)^{2p\pm 1} = -1 = (-1)^{\pm 1}$$

Sommes et produits

• Ces notations correspondent à la somme et au produit d'une famille finie de nombres :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad \prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$
$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$$

★ Par convention une somme d'un élément est celui-ci, et une somme vide est égale à zéro, l'élément neutre de l'addition ; les notations pour les produits sont similaires et justifient la notation $0! = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1 \quad \sum_{k=1}^{0} x_k = 0 \quad \prod_{k=1}^{1} x_k = x_1 \quad \prod_{k=1}^{0} x_k = 1 \quad 0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$$

∗ La valeur d'une somme ne dépend pas de l'indice employé, k ici :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

∗ L'associativité, la commutativité et la distributivité se généralisent à des sommes et des produits d'une famille finie de nombres :

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad \prod_{k=1}^{n}(x_k y_k) = \prod_{k=1}^{n} x_k \times \prod_{k=1}^{n} y_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \prod_{k=1}^{n} x_{n+1-k} = \prod_{k=1}^{n} x_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} x y_k = x \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Une démonstration rigoureuse s'effectue par récurrence sur n.

∗ Cet exemple représente plus naïvement une somme précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k} = x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 \qquad \text{par commutativité}$$
$$= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

▷ La somme des entiers entre 1 et $n \in \mathbb{N}$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

▷▷ Une écriture colonne par colonne de cette somme d'entiers consécutifs permet, grâce à la commutativité de l'addition, d'obtenir sa valeur :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \quad 2 \quad + \cdots + (n-1) + n \qquad 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + \cdots + \quad 2 \quad + 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

▷ Déduire ces deux sommes d'entiers pairs et d'entiers impairs de la somme précédente des entiers consécutifs :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad S = \sum_{k=1}^{n}(2k) \qquad T = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

▷▷ Une factorisation et un développement transforment ces sommes :

$$S = \sum_{k=1}^{n}(2k) = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$
$$T = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$$

$\triangleright$ Les produits des entiers pairs et impairs s'expriment par des factoriels :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\, n! \qquad \prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$$

$\triangleright\!\triangleright$ Le nombre 2 se factorise dans chaque terme de ce produit d'entiers pairs ; le produit des entiers impairs se déduit du produit précédent par un quotient :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n) = 2^n\, n!$$

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$$

$\triangleright$ Un changement d'indice aboutit à la simplification de ces produits :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1 \qquad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \qquad \prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{4}{k^2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{6n(n-1)}$$

$\triangleright\!\triangleright$ La premier produit correspond à ce quotient :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{j=2}^{n+1}j}{\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{n+1}{1} = n+1$$

Le deuxième produit est similaire :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod\limits_{k=2}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}k}{\prod\limits_{k=2}^{n}k} = \frac{1}{n}$$

Un produit remarquable intervient dans le troisième :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)\times\prod\limits_{k=2}^{n}(k+1)}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n}k\right)^2} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}k\times\prod\limits_{k=3}^{n+1}k}{\left(\prod\limits_{k=2}^{n}k\right)^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Le décalage des indices est de deux dans le dernier produit :

$$\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{4}{k^2}\right) = \prod_{k=3}^{n}\frac{k^2-4}{k^2} = \prod_{k=3}^{n}\frac{(k-2)(k+2)}{k^2}$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=3}^{n}(k-2)\times\prod\limits_{k=3}^{n}(k+2)}{\left(\prod\limits_{k=3}^{n}k\right)^2} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-2}k\times\prod\limits_{k=5}^{n+2}k}{\left(\prod\limits_{k=3}^{n}k\right)^2}$$

$$= \frac{(1\times 2)\times((n+1)(n+2))}{((n-1)n)\times(3\times 4)} = \frac{(n+1)(n+2)}{6n(n-1)}$$

$\ast$ Lorsque le plus petit indice est 1 ou 2 à la place de 2 ou 3, ces produits sont nuls car ce nouveau facteur est nul.

Carré et cube de sommes

$\triangleright$ Le carré d'une somme de n termes comporte n^2 termes.

$\triangleright\!\triangleright$ Ce produit est obtenu en appliquant deux fois la distributivité :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2 &= (x_1+x_2+\cdots+x_n)(x_1+x_2+\cdots+x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i\sum_{j=1}^{n}x_j\right)\\ &= \begin{array}{lllll} & x_1^2 & +x_1x_2 + x_1x_3 + & \cdots & +x_1x_n \\ +x_2x_1 + & x_2^2 & +x_2x_3 + & \cdots & +x_2x_n \\ + & \cdots & \cdots & \cdots & \\ +x_nx_1 + x_nx_2 + & \cdots & +x_nx_{n-1} + & x_n^2 & \end{array}\\ &= \sum_{1\le i,j\le n}x_ix_j = \sum_{k=1}^{n}x_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\end{aligned}$$

La dernière égalité regroupe les termes $x_ix_j + x_jx_i$ dont les indices des deux facteurs sont différents en $2x_ix_j$ où $i<j$.

$\triangleright$ La méthode est la même pour développer $(x+y+z)^3$.

$\vartriangleright\!\!\vartriangleright$ Cette somme comporte $3^3 = 27$ termes :

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^3 \\
=\;& xxx + \underline{\underline{xxy}} + xxz + \underline{\underline{xyx}} + xyy + \underline{xyz} + xzx + \underline{xzy} + xzz \\
&+ \underline{\underline{yxx}} + yxy + \underline{yxz} + yyx + yyy + yyz + \underline{yzx} + yzy + yzz \\
&+ zxx + \underline{zxy} + zxz + \underline{zyx} + zyy + zyz + zzx + zzy + zzz \\
=\;& x^3 + y^3 + z^3 + 3\,(\underline{\underline{x^2y}} + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6\,\underline{xyz}
\end{aligned}$$

Les rôles des trois variables x, y et z sont symétriques.
Le coefficient 3 d'un terme comme x^2y correspond au regroupement des trois monômes xxy, xyx et yxx, et le coefficient 6 provient du fait qu'il existe 6 façons d'énumérer les variables x, y et z :

$$xyz \quad xzy \quad yxz \quad yzx \quad zxy \quad zyx$$

$\vartriangleright$ Plus généralement l'expression développée de la puissance trois d'une somme de n termes comporte trois sortes de termes :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^3 = \sum_{1\le i,j,k\le n} x_i x_j x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + 3 \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}} x_i^2 x_j + 6 \sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k$$

$\vartriangleright\!\!\vartriangleright$ La forme développée de ce produit est obtenue en énumérant tous les facteurs possibles et comporte donc n^3 termes.
Le regroupement des termes égaux se fait de la même façon que dans le développement précédent. La première somme correspond au cas où les trois indices sont les mêmes, $i = j = k$; la deuxième somme regroupe les termes $x_i^2 x_j$, $x_i x_j x_i$ et $x_j x_i^2$ où deux des trois indices sont égaux pour aboutir à $3\ x_i^2 x_j$; de même la dernière somme énumère les produits par groupe de six où les indices i, j et k sont tous différents :

$$x_i x_j x_k \quad x_i x_k x_j \quad x_j x_i x_k \quad x_j x_k x_i \quad x_k x_i x_j \quad x_k x_j x_i$$

Produits remarquables

Formule du binôme

• Les coefficients binomiaux sont ceux du triangle de Pascal où chaque terme est la somme de celui qui est au dessus et de son voisin de gauche :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \text{si } 1 \le k \le n \qquad \begin{array}{ccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & \underline{3} & \underline{3} & 1 \\ 1 & 4 & \underline{6} & 4 & 1 \\ & \cdots & & \cdots \end{array}$$

■ Ces coefficients binomiaux peuvent aussi être calculée à l'aide de la fonction factorielle :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{où } 0 \le k \le n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

◊ Une récurrence sur n d'hypothèse $\mathcal{P}(n)$ justifie l'expression des coefficients binomiaux du triangle de Pascal à l'aide de factorielles :

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \forall\, k \in \{0 \cdots n\} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

◊ La vérification de l'égalité construisant le triangle de Pascal est une simple fraction mise au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{k\,n!}{k\,(k-1)!\,(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)\,n!}{k!\,(n+1-k)\,(n-k)!} \\
&= \frac{k\,n!}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)\,n!}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(k+n+1-k)\,n!}{k!\,(n+1-k)!} \\
&= \frac{(k+n+1-k)\,n!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

■ La formule du binôme fait intervenir les coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + \cdots \\ &\qquad \cdots + \binom{n}{n-2} x^2y^{n-2} + nx\,y^{n-1} + y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

◊ Une récurrence dont la vérification est immédiate pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$ démontre la formule du binôme :

$$(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{-k} = 1 \times x^0 \times y^0$$

$$(x+y)^1 = x+y = \binom{1}{0} x^0y^1 + \binom{1}{1} x^1y^0$$

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k y^{2-k}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \qquad \text{par distributivité} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \qquad \text{avec } j=k+1 \\ &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} \\ &= y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right) x^j y^{n+1-j} + x^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1}y^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}\end{aligned}$$

∗ Cette preuve reprend la même égalité de façon moins élégante :

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\ &= (x+y)\Big(\binom{n}{0} x^0y^n + \binom{n}{1} x^1y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2y^{n-2} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1}y^1 + \binom{n}{n} x^n y^0\Big) \\ &= \binom{n}{0} x^1y^n + \binom{n}{1} x^2y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^ny^1 + x^{n+1} \\ &\quad + y^{n+1} + \binom{n}{1} x^1y^n + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1}y^2 + \binom{n}{n} x^ny^1 \\ &= y^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^1y^n + \binom{n+1}{2} x^2y^{n-1} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \binom{n+1}{n-1} x^{n-1}y^2 + \binom{n+1}{n} x^ny^1 + x^{n+1}\end{aligned}$$

∗ La formule du binôme $(x+y)^n = (y+x)^n$ est symétrique par rapport aux variables x et y, et les coefficients en k et en $n-k$ sont égaux. Certaines preuves sont plus aisées par une formule que par l'autre :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k \qquad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} x^k$$

$$(x-y)^n = \big(x+(-y)\big)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} x^{n-k}y^k$$

Séries géométriques

■ Cette différence correspond à un autre produit remarquable :

$$\begin{aligned}x^{n+1}-y^{n+1} &= (x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \cdots + x\,y^{n-1} + y^n) \\ &= (x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}\end{aligned}$$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

◊ La preuve repose sur un changement d'indices et une mise à part des deux cas particuliers $j=0$ et $j=n+1$ dans ces sommes :

$$\begin{aligned}
&(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} x^j y^{n+1-j} - \sum_{j=0}^{n} x^j y^{n+1-j} \qquad j=k+1 \text{ dans la première somme} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} x^j y^{n+1-j} - \sum_{j=1}^{n} x^j y^{n+1-j} - y^{n+1} \\
&= x^{n+1} - y^{n+1}
\end{aligned}$$

$*$ Cette démonstration avec les sommes est plus convaincante qu'une preuve avec des points de suspension « $\cdots$ ».

■ La formule des *séries géométriques* s'en déduit par quotient :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{pour } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$*$ Ces égalités indépendantes de la formule du binôme sont des cas particuliers usuels des formules précédentes :

$$x^n - 1 = x^n - 1^n = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$x^{2n+1} + 1 = x^{2n+1} - (-1)^{2n+1} = (x+1)\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^k$$

Inégalités

Propriétés de base de comparaison des réels

Ce premier paragraphe énonce sans démonstration les propriétés fondamentales de comparation des nombres réels.

■ La relation de comparaison $\leq$ sur les nombres réels est une relation d'ordre total :

relation réflexive	$\forall x$	$x \leq x$
relation anti-symétrique	$\forall x\ \forall y$	$x \leq y$ ET $y \leq x \Longrightarrow x = y$
relation transitive	$\forall x\ \forall y\ \forall z$	$x \leq y$ ET $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
ordre total	$\forall x\ \forall y$	$x \leq y$ OU $y \leq x$

■ La relation $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$\forall x\ \forall y\ \forall z \qquad x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z$$
$$\forall x\ \forall y \quad 0 \leq x \text{ ET } 0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq xy$$

○ Un réel x est positif si et seulement si $0 \leq x$, et négatif dans le cas $x \leq 0$.
Les relations de comparaison $<$, $>$ et $\geq$ se déduisent de la relation $\leq$:

$$x \leq y \Longleftrightarrow y \geq x \qquad x < y \Longleftrightarrow (x \leq y \text{ ET } x \neq y) \Longleftrightarrow y > x$$

$*$ Ces équivalences reposent sur la propriété d'ordre total :

$$x < y \Longleftrightarrow \text{NON}\,(x \geq y) \qquad x \leq y \Longleftrightarrow \text{NON}\,(x > y)$$

Si $x \geq y$ est faux alors $x \neq y$ et $y \geq x$, et ainsi $x < y$.

Addition et inégalités

■ Ce formulaire regroupe les propriétés des sommes d'inégalités :

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \geq 0 \Longleftrightarrow -y \leq -x$$
$$x \geq 0 \Longleftrightarrow -x \leq 0 \qquad x \leq 0 \Longleftrightarrow -x \geq 0$$
$$x \leq y \text{ ET } z \leq t \Longrightarrow x+z \leq y+t$$
$$x < y \text{ ET } z \leq t \Longrightarrow x+z < y+t$$

◊ Des implications circulaires démontrent les premières équivalences, les suivantes correspondent aux cas $x = 0$ ou $y = 0$:

$$\begin{aligned}
x \leq y \Longrightarrow\ & x + (-x) &= 0 &\leq y + (-x) &= y - x \\
\Longrightarrow\ & 0 + (-y) &= -y &\leq y - x + (-y) &= -x \\
\Longrightarrow\ & -y + (x+y) &= x &\leq -x + (x+y) &= y
\end{aligned}$$

◊ Les dernières propriétés proviennent de la transitivité des inégalités :

$$\left.\begin{aligned} x \leq y \Longrightarrow\ & x+z \leq y+z \\ \text{ET } z \leq t \Longrightarrow\ & \qquad y+z \leq y+t \end{aligned}\right\} \text{ donc } x+z \leq y+t$$

Règle des signes

■ La règle des signes peut aussi s'écrire avec des inégalités larges :

$$x > 0 \text{ ET } y > 0 \Longrightarrow xy > 0 \qquad x > 0 \text{ ET } y < 0 \Longrightarrow xy < 0$$
$$x < 0 \text{ ET } y > 0 \Longrightarrow xy < 0 \qquad x < 0 \text{ ET } y < 0 \Longrightarrow xy > 0$$

$*$ Un produit de deux facteurs est positif si et seulement si ses deux facteurs sont de même signe, ainsi $1 = 1 \times 1 > 0$.

◊ Les signes des produits ci-dessus proviennent des règles précédentes sur l'opposé d'un nombre, comme dans cet exemple :

$$\begin{aligned} x > 0 \text{ ET } y < 0 &\Longrightarrow x > 0 \text{ ET } -y > 0 \\ &\Longrightarrow x \times (-y) = -(xy) > 0 \\ &\Longrightarrow xy = -(-xy) < 0 \end{aligned}$$

Le cas $x < 0$ et $y > 0$ est similaire en échangeant les rôles de x et y, et le dernier cas se ramène au premier car $xy = (-x)(-y)$.

Multiplication et inégalités

▪ Ce tableau récapitule les principales propriétés des produits d'inégalités :

$$x < y \text{ ET } z > 0 \Longrightarrow xz < yz$$
$$0 \le x < y \text{ ET } 0 \le z < t \Longrightarrow xz < yt$$
$$x > 0 \Longleftrightarrow 1/x > 0 \qquad x > 1 \Longleftrightarrow 0 < 1/x < 1$$
$$0 < x < y \Longleftrightarrow 0 < 1/y < 1/x \qquad 0 \le x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$$

Il existe des propriétés similaires avec des inégalités larges.

◊ Les méthodes de démonstration sont comparables :

$$\begin{aligned} x < y \text{ ET } z > 0 &\Longrightarrow y - x > 0 \text{ ET } z > 0 \\ &\Longrightarrow (y-x)z = yz - xz > 0 \\ &\Longrightarrow xz < yz \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \le z \text{ ET } 0 \le x < y &\Longrightarrow xz \le yz \\ 0 < y \text{ ET } 0 \le z < t &\Longrightarrow yz < yt \end{aligned}\right\} \text{donc } xz < yt$$

◊ Les propriétés des inverses proviennent de la règle des signes et de produits par $1/x$.

∗ Ces inégalités sur les produits opèrent uniquement sur les nombres positifs, ces implications sont fausses dans le cas général :

$$-3 \le 2 \text{ ET } -5 \le 4 \text{ ET } (-3) \times (-5) = 15 > 2 \times 4 = 8$$
$$-\frac{1}{3} < 1 \text{ ET } \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3 < 1 \qquad -4 < 3 \text{ ET } (-4)^2 = 16 > 3^2 = 9$$

∗ La résolution d'une inégalité passe le plus souvent par une factorisation et un tableau de signes.

▹ Résolution de l'équation $x \ge x^2$.

▹▹ La factorisation de la différence aboutit à ce tableau de signes :

$$\begin{aligned} x \ge x^2 &\Longleftrightarrow x - x^2 \ge 0 \\ &\Longleftrightarrow x(1-x) \ge 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in [0,\, 1] \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$1-x$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Trois fonctions réelles

Dans cette partie a, b, h, x et y sont des réels, $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $p \in \mathbb{Z}^2$.

Valeur absolue

• L'application valeur absolue $|\bullet|$ peut être définie ainsi :

$$0 \le |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Les inégalités entre les réels positifs et négatifs justifient la cohérence de cette définition double.

▪ Les propriétés élémentaires des valeurs absolues sont les suivantes :

$$-|x| \le x \le |x| \qquad |xy| = |x|\,|y| \qquad |x| = |y| \Longleftrightarrow x = y \text{ OU } x = -y$$
$$|x| \le y \Longleftrightarrow -y \le x \le y \qquad x \in [a-h,\, a+h] \Longleftrightarrow |x-a| \le h$$

◊ Les preuves de ces propositions distinguent en fonction du signe de l'argument de la valeur absolue, par exemple selon les deux cas $x \le 0$ et $x \ge 0$. Les deux dernières équivalences diffèrent uniquement par leur notations, $x - a$ à la place de x, et h à la place de y.

Inégalités triangulaires

▪ Les inégalités triangulaires sont à la base de nombreuses majorations et minorations :

$$|x+y| \le |x| + |y| \qquad \text{est la principale inégalité triangulaire}$$
$$\big||x| - |y|\big| \le |x+y| \le |x| + |y| \qquad \big||x| - |y|\big| \le |x-y| \le |x| + |y|$$

◊ La principale inégalité triangulaire se démontre par une somme d'encadrement :

$$\begin{cases} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \end{cases} \qquad \begin{aligned} \text{par somme } -(|x|+|y|) \le x + y \le |x| + |y| \\ \text{et donc } |x+y| \le |x| + |y| \end{aligned}$$

◊ Les autres inégalités triangulaires se déduisent de la précédente :

$$\begin{cases} |x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x-y| \\ |y| = |(y-x)+x| \leq |x-y| + |x| \Longrightarrow |y| - |x| \leq |x-y| \end{cases}$$

$$\text{donc } \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

$$\big||x| - |y|\big| = \big||x| - |-y|\big| \leq |x-(-y)| = |x+y|$$

$*$ La fonction réelle signe sgn, et la partie positive x_+ et la partie négative x_- de x sont liées à la valeur absolue :

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad |x| = x \operatorname{sgn} x \qquad x = |x| \operatorname{sgn} x$$

$$x_+ = \max(x, 0) = \frac{|x| + x}{2} \geq 0 \qquad x_- = \max(-x, 0) = \frac{|x| - x}{2} \geq 0$$

$$|x| = x_+ + x_- \qquad x = x_+ - x_-$$

Partie entière

• La partie entière $\mathrm{E}(x)$ de x est le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à x et est caractérisée par l'une ou l'autre de ces définitions :

$$\mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z} \text{ ET } \mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1 \qquad \mathrm{E}(x) = \max\{p \in \mathbb{Z} \ / \ p \leq x\}$$

Ainsi $\mathrm{E}(\pi) = 3$ et $\mathrm{E}(-\pi) = -4$.
Le nombre $x - \mathrm{E}(x) \in [0, 1[$ est appelé partie fractionnaire de x.

★ Ces encadrements sont équivalents par somme $\bullet \pm 1$ sur deux termes :

$$\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1 \Longleftrightarrow x - 1 < \mathrm{E}(x) \leq x$$

■ La partie entière est croissante et vérifie ces propriétés :

$$\mathrm{E}(x) = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z} \qquad \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(y) \Longrightarrow |x-y| < 1$$

$$\mathrm{E}(x+p) = \mathrm{E}(x) + p \quad \text{où } p \in \mathbb{Z} \qquad x \leq y \Longrightarrow \mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(y)$$

◊ La propriété $\mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z}$ démontre l'implication $\mathrm{E}(x) = x \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$. Réciproquement si $x \in \mathbb{Z}$ alors la définition $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$ associé au fait que $\mathbb{Z}$ est discret entraine $x < \mathrm{E}(x) + 1$ et $x \leq \mathrm{E}(x)$. En conclusion ces deux inégalités larges prouvent $x = \mathrm{E}(x)$ dès que $x \in \mathbb{Z}$.

◊ Des manipulations d'inégalités démontrent l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 < \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(y) \leq x \\ y \geq \quad \mathrm{E}(y) \quad > y - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x - y - 1 < 0 < x - y + 1$$

$$\Longrightarrow x - y < 1 \text{ ET } -1 < x - y$$

$$\Longrightarrow |x - y| < 1$$

◊ L'application E est croissante pour cette raison :

$$x \leq y \Longrightarrow \mathrm{E}(x) \leq x \leq y < \mathrm{E}(y) + 1$$

$$\Longrightarrow \mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(y) \qquad \text{car } \mathbb{Z} \text{ est discret}$$

◊ La démonstration de l'égalité $\mathrm{E}(x+p) = \mathrm{E}(x) + p \in \mathbb{Z}$ vérifie les propriétés caractéristiques de la partie entière :

$$\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1 \quad \text{donc} \quad \mathrm{E}(x) + p \leq x + p < \mathrm{E}(x) + p + 1$$

$$\text{et} \quad \mathrm{E}(x) + p \in \mathbb{Z}$$

▷ Démonstration de l'encadrement suivant où $u \in \mathbb{R}$:

$$10\ \mathrm{E}(u) \leq \mathrm{E}(10u) \leq 10u < \mathrm{E}(10u) + 1 \leq 10\,(\mathrm{E}(u) + 1)$$

▷▷ Les parties entières de u et de $10u$ énoncent ces encadrements :

$$\mathrm{E}(u) \leq u < \mathrm{E}(u) + 1 \qquad 10\ \mathrm{E}(u) \leq 10u < 10(\mathrm{E}(u) + 1)$$

$$\mathrm{E}(10u) \leq 10u < \mathrm{E}(10u) + 1$$

La combinaison des encadrements associés à $10u$ aboutit à ces inégalités :

$$10\ \mathrm{E}(u) \leq 10u < \mathrm{E}(10u) + 1 \qquad \mathrm{E}(10u) \leq 10u < 10(\mathrm{E}(u) + 1)$$

Comme $\mathbb{Z}$ est discret, ces inégalités strictes sur des entiers correspondent à deux des inégalités larges recherchées :

$$10\ \mathrm{E}(u) \leq \mathrm{E}(10u) \qquad \mathrm{E}(10u) + 1 \leq 10(\mathrm{E}(u) + 1)$$

Par ailleurs l'encadrement central est la définition de $\mathrm{E}(10u)$.

$*$ Un certain nombre de démonstrations faisant intervenir la partie entière $\mathrm{E}(x)$ reprend les méthodes des démonstrations précédentes ou repose sur l'égalité $x = p + h$ où $p = \mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z}$ et $h = x - \mathrm{E}(x) \in [0, 1[$.

Approximation décimale

• Les approximations décimales par défaut a_n et par excès b_n de $x \in \mathbb{R}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ sont définies ainsi :

$$a_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \leq x = \frac{10^n x}{10^n} < b_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x) + 1}{10^n}$$

$*$ Les développements décimaux par défaut et par excès à 10^{-1} et 10^{-2} près de π sont donc ceux-ci :

$$\frac{\mathrm{E}(10\pi)}{10} = 3{,}1 \leq \pi < 3{,}2 \qquad 3{,}14 \leq \pi < 3{,}15$$

$\diamond$ L'encadrement précédent provient de la définition même de la partie entière, après quotient par 10^n.

$\triangleright$ La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$\triangleright\!\triangleright$ Les inégalités $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$ proviennent des inégalités de l'exercice précédent appliquée avec $u = 10^n x$, divisées ensuite par 10^{n+1} :

$$10\ \mathrm{E}(10^n x) \leq \mathrm{E}(10^{n+1}x) \leq 10^{n+1}x < \mathrm{E}(10^{n+1}x) + 1 \leq 10(\mathrm{E}(10^n x)+1)$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n}}_{= a_n} \leq \underbrace{\frac{\mathrm{E}(10^{n+1}x)}{10^{n+1}}}_{= a_{n+1}} \leq \quad x \quad < \underbrace{\frac{\mathrm{E}(10^{n+1}x) + 1}{10^{n+1}}}_{= b_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{\mathrm{E}(10^n x) + 1}{10^{n+1}}}_{= b_n}$$

$*$ Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et la suite de termes $b_n - a_n = 1/10^n$ est de limite nulle.
Le théorème d'analyse sur les suites adjacentes justifie que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x.

Radicaux

$\bullet$ Les racines carrées et racines cubiques peuvent être définies ainsi :

racine carrée notée $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$: $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \quad \exists!\, y \in \mathbb{R}_+ \quad y^2 = x$

racine cubique $\qquad y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$: $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, y \in \mathbb{R} \quad y^3 = x$

$\diamond$ Ce chapitre admet que l'application $x \mapsto x^2$ strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ est bijective. L'application racine $\sqrt{\bullet}$ sur $\mathbb{R}_+$ est l'application réciproque.

$\blacksquare$ Certaines égalités sont uniquement valables pour les nombres positifs, et d'autres exactes pour tous les réels :

$$\text{lorsque } (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : \quad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\,\sqrt{y} \qquad (\sqrt{x}\,)^2 = \sqrt{x^2} = x$$
$$x < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{y} \iff x^2 < y^2$$

$$\text{lorsque } (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \sqrt{x^2} = |x| \qquad x^2 = y^2 \iff |x| = |y|$$
$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} \qquad \left(\sqrt[3]{x}\,\right)^3 = \sqrt[3]{x^3} = x$$
$$x < y \iff \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \iff x^3 < y^3$$

Les applications $\sqrt{\bullet}$ et $\sqrt[3]{\bullet}$ sont donc strictement croissantes.

$\diamond$ La démonstration de $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ consiste à vérifier l'égalité $(\sqrt{x}\sqrt{y}\,)^2 = xy$ et $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$.
Cette propriété appliquée à $y = x \geq 0$ démontre $\sqrt{x^2} = x = (\sqrt{x}\,)^2$.

$\diamond$ Les produits d'inégalités de nombres positifs prouvent une première implication :

$$0 \leq x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$$

Une preuve de l'implication réciproque pour les nombres positifs repose sur une identité remarquable :

$$\begin{aligned} x^2 < y^2 &\Longrightarrow y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) > 0 \\ &\Longrightarrow y - x > 0 \qquad \text{car } 0 \leq x \text{ et } 0 < y, \text{ donc } y + x > 0 \\ &\Longrightarrow x < y \end{aligned}$$

En conclusion les réels positifs vérifient $x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$.

$\diamond$ L'équivalence précédente appliquée à $\sqrt{x} \geq 0$ et à $\sqrt{y} \geq 0$ termine la démonstration :

$$x = (\sqrt{x}\,)^2 < y = (\sqrt{y}\,)^2 \iff \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

$*$ Ces méthodes s'adaptent aux racines cubiques.

$\circ$ La racine n-ème $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ de x est définie par $y^n = x$; elle opère comme la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ si $n \in 2\mathbb{N}^*$ est pair, et sur $\mathbb{R}$ si $n \in 2\mathbb{N}^* + 1$ est impair.

$\square$ Les racines vérifient ces propriétés où $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{1} = 1 \qquad \sqrt[n]{0} = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x}} \quad \text{pour } x \neq 0$$
$$x < y \iff \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x^n < y^n$$
$$\left(\sqrt[n]{x}\,\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

L'application $\sqrt[n]{\bullet}$ est donc strictement croissante :

$\triangleright$ Les racines carrées vérifient ces inégalités :

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad \text{pour } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$
$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x} \qquad \text{dès que } 0 \leq x \leq y$$

$\triangleright\triangleright$ La démonstration de la première inégalité exploite principalement le fait que l'application racine $\sqrt{\bullet}$ est croissante et positive :

$$x + y = \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 \leq \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y}\,)^2$$
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad \text{car } \sqrt{\bullet} \text{ est croissante}$$

$\triangleright\triangleright$ La seconde inégalité découle de la première par différence à partir de la somme de nombres positifs $y = x + (y - x)$:

$$\sqrt{y} = \sqrt{x + (y-x)} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y-x} \qquad \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$$

Exemples d'équations et d'inégalités

$\triangleright$ Résoudre l'équation réelle $|x+2| + |x-4| = 5|x| - 1$ en étudiant les intervalles sur lesquels les restrictions de l'équation sont affines.

$\triangleright\triangleright$ La fonction auxiliaire f dépend donc de ces quatre intervalles :

$$f(x) = |x+2| + |x-4| - 5|x| + 1$$
$$]-\infty,\, -2] \qquad [-2,\, 0] \qquad [0,\, 4] \qquad [4,\, +\infty[$$

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$\|x+2\|$		$-x-2$		$x+2$		$x+2$		$x+2$	
$\|x-4\|$		$-x+4$		$-x+4$		$-x+4$		$x-4$	
$\|x\|$		$-x$		$-x$		x		x	
$f(x)$		$3x+3$		$5x+7$		$-5x+7$		$-3x-1$	

Parmi les solutions éventuelles qui sont -1 sur $]-\infty,\, -2]$, $-7/5$ sur $[-2,\, 0]$, $7/5$ sur $[0,\, 4]$ et $-1/3$ sur $[4,\, +\infty[$, seuls les deux nombres $\pm 7/5$ conviennent car ils appartiennent à l'intervalle considéré.

$\triangleright$ Exprimer l'application f définies ci-dessous comme somme de termes de la forme $\lambda|x-a|$ avec $a \in \{-1, 2\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec une éventuelle application affine :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x \in]-\infty,\, -1] \\ x & \text{pour } x \in [-1,\, 2] \\ 2 & \text{pour } x \in [2,\, +\infty[\end{cases}$$

$\triangleright\triangleright$ Le but consiste à rechercher $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant l'égalité suivante. L'étude par intervalle fournit un système d'équations :

$$f(x) = \alpha|x+1| + \beta|x-2| + \gamma x + \delta$$

x	$-\infty$		-1		2		$-\infty$
$\|x+1\|$		$-x-1$		$x+1$		$x+1$	
$\|x-2\|$		$-x+2$		$-x+2$		$x-2$	
$f(x)$		-1		x		2	

$$\begin{cases} (-\alpha - \beta + \gamma)\,x - \alpha + 2\beta + \delta = -1 \\ (\alpha - \beta + \gamma)\,x + \alpha + 2\beta + \delta = x \\ (\alpha + \beta + \gamma)\,x + \alpha - 2\beta + \delta = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \delta = -1 \\ \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \delta = 2 \end{cases}$$

Les deux systèmes sont équivalents, le second est obtenu en identifiant les coefficients des termes en x et les termes constants dans les équations.
Les trois équations $\pm\alpha \pm \beta + \gamma$ en (α, β, γ) fournissent par sommes et différences une condition nécessaire $(\alpha, \beta, \gamma) = (1/2, -1/2, 0)$ de solution du système. La valeur éventuelle de δ s'obtient par substitution :

$$\delta = -1 + \alpha - 2\beta = -\alpha - 2\beta = 2 - \alpha + 2\beta$$
$$= \quad 1/2 \quad = \quad 1/2 \quad = \quad 1/2$$

La seule solution possible est $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1/2, -1/2, 0, 1/2)$.
Réciproquement une vérification sur le tableau de l'expression de f justifie que ces valeurs sont bien solution :

$$f(x) = \frac{|x+1|}{2} - \frac{|x-2|}{2} + \frac{1}{2}$$

$\triangleright$ La partie entière vérifie l'égalité $\mathrm{E}\,(\dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n}) = \mathrm{E}(x)$.

$\triangleright\triangleright$ La méthode pratique s'applique ici :

$$n \in \mathbb{N}^* \qquad x \in \mathbb{R} \qquad p = \mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z} \qquad h = x - \mathrm{E}(x) \in [0,\, 1[$$
$$\begin{aligned} p = \mathrm{E}(x) \leq x < p + 1 &\Longrightarrow np \leq nx = n(p+h) < n(p+1) \\ &\Longrightarrow np = \mathrm{E}(np) \leq \mathrm{E}(nx) \leq nx < np + n \\ &\Longrightarrow p \leq \frac{\mathrm{E}(nx)}{n} < p + 1 \\ &\Longrightarrow \mathrm{E}\,(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}) = p \end{aligned}$$

$\triangleright$ L'étude d'une fonction auxiliaire prouve cette inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1-\frac{x}{2} \qquad \text{lorsque } x \geq 0$$

⊳⊳ L'application auxiliaire φ est définie par différence :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2}$$

x	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	0	$\nearrow +$

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{2(1+x)^{3/2}} + \frac{1}{2} \geq 0 \qquad \text{car } (1+x)^{3/2} \geq 1$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi(x) \geq 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1-\frac{x}{2}$$

⊳⊳ Une deuxième démonstration de l'inégalité $1/\sqrt{1+x} \geq 1-x/2$ si $x \geq 0$ exploite les méthodes algébriques usuelles. Cette inégalité est vérifiée lorsque $x \geq 1/2$ car un membre est positif et l'autre négatif. La suite de la preuve suppose $x \in [0,\ 1/2[$ et démontre l'inégalité sur les carrés des deux membres qui sont positifs :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1-\frac{x}{2} &\iff \frac{1}{1+x} \geq 1-x+\frac{x^2}{4} \\
&\iff 1 \geq \left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)(1+x) = 1-x+\frac{x^2}{4}+x-x^2+\frac{x^3}{4} \\
&\iff 1 \geq 1-\frac{3x^2}{4}+\frac{x^3}{4} \\
&\iff 0 \geq \frac{x^2}{4}(x-3) \qquad \text{vrai pour tout } x \in [0,\ 1/2[
\end{aligned}$$

⊳ L'inégalité suivante découle de la précédente :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \qquad \text{pour } x > 0$$

⊳⊳ Le changement de variable $y = 1/x \in \mathbb{R}_+^*$ transforme cette inégalité en la précédente puis un factorisation par $y > 0$ termine la démonstration :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}}} = \frac{y}{\sqrt{1+y}} \geq y - \frac{y^2}{2} = \frac{1}{\frac{1}{y}} - \frac{1}{2\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

$$\text{car} \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geq 1-\frac{y}{2} \text{ et par produit } \frac{y}{\sqrt{1+y}} \geq y-\frac{y^2}{2} \text{ par } y > 0$$

Une preuve par une fonction auxilaire est aussi possible.