DEVOIR DU MERCREDI 18 MARS 2015

UN EXEMPLE D'APPLICATION LINÉAIRE

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$, l'application $f \in \mathcal{L}(E)$, le vecteur $U \in E$ et les sous-espaces vectoriels F et G de E sont définis ainsi :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y-z \\ 2x-2y \\ 2y+2z \end{pmatrix} \qquad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \;\Big/\; 2x-y+z=0 \right\}$$

$$U\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E \;\Big/\; f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

1 - Déterminer un vecteur V non nul à coefficients entiers relatifs de $\ker f$ et démontrer que $\ker f = \mathbb{R}V$.

2 - Démontrer $\operatorname{Im} f = F$ et déterminer une inclusion entre $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

3 - Déterminer un vecteur W non nul à coefficients entiers relatifs invariant par f, c'est-à-dire vérifiant $f(W) = W$, et démontrer l'égalité $G = \mathbb{R}W$.

4 - Comparer $\operatorname{Im}(f \circ f)$ et $\mathbb{R}W$, démontrer $\ker(f \circ f) = \mathbb{R}U \oplus \mathbb{R}V$, et simplifier $f \circ f \circ f$ en fonction de Id_E, f ou $f \circ f$.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

5 - Déterminer les développements limités suivants à l'ordre 5 en $x = 0$:

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)} \qquad \frac{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^5)}$$

6 - Déterminer ces deux limites par des développements limités où $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*\,2}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+ax}{1+bx}\right)^{1/x} \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x}$$

UN POLYNÔME D'ENDOMORPHISME

Dans cette partie E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{u} \in E$ et $(a,b,\lambda) \in \mathbb{K}^3$, en outre $a \neq b$. L'application linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection si et seulement si $p = p \circ p$, qui est aussi noté p^2.
L'endomorphisme identité de E est noté Id_E.
L'endomorphisme nul $0_{E\to E}$ est défini par $0_{E\to E} : \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{0}$.
Par définition $E_\lambda = \left\{\boldsymbol{u} \in E \;\Big/\; f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\right\} = \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.
La condition $E = E_a \oplus E_b$ sur $f \in E$ définit la proposition $\mathcal{P}_{a,b}$.

7 - Justifier que E_a est un sous espace vectoriel de E, et que ces sous-espaces vérifient $E_a \cap E_b = \{\boldsymbol{0}_E\}$.

8 - Montrer à partir de la décomposition de $\boldsymbol{u}$ sur la somme directe $E = E_a \oplus E_b$ que la proposition $\mathcal{P}_{a,b}$ entraîne ces deux résultats :

$$(f - a\,\mathrm{Id}_E)((f - b\,\mathrm{Id}_E)(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{0}_E \qquad (f - a\,\mathrm{Id}_E)(\boldsymbol{u}) \in E_b$$

9 - Montrer ces égalités pour tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned}(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) &= (f - b\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\,\mathrm{Id}_E) \\ &= f \circ f - (a+b)f + ab\,\mathrm{Id}_E\end{aligned}$$

10 - Lorsque l'application f vérifie $(f - a\,\mathrm{Id}) \circ (f - b\,\mathrm{Id}) = 0_{E\to E}$ prouver réciproquement ces propositions :

$$f(\boldsymbol{u}) - b\boldsymbol{u} \in E_a \qquad f(\boldsymbol{u}) - a\boldsymbol{u} \in E_b$$

11 - Exprimer le vecteur $\boldsymbol{u}$ sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $f(\boldsymbol{u}) - a\boldsymbol{u}$ et $f(\boldsymbol{u}) - b\boldsymbol{u}$, puis en déduire l'équivalence suivante :

$$(f - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0_{E\to E} \iff f \text{ vérifie } \mathcal{P}_{a,b}$$

12 - Montrer que l'endomorphisme f vérifie la proposition $\mathcal{P}_{a,b}$ si et seulement si l'endomorphisme $p = \dfrac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{Id}_E)$ est une projection ; prouver dans ce cas trois égalités entre les ensembles $\ker p$, $\operatorname{Im} p$, E_a, E_b et $\left\{\boldsymbol{u} \in E \;\Big/\; p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\right\}$.

13 - Démontrer cette implication lorsque f vérifie la proposition $\mathcal{P}_{a,b}$:

$$f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} \text{ ET } \lambda \notin \{a,b\} \implies \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}_E$$

Dans la suite de cette partie l'endomorphisme f vérifie $\mathcal{P}_{a,b}$ et les applications p et q définies ainsi sont des projections :

$$p = \frac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{Id}_E) \qquad q = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{Id}_E)$$

14 - Exprimer Id_E et f sous la forme de deux combinaisons linéaires de p et de q, et calculer $p \circ q$, $q \circ p$, p^n et q^n en fonction de p, q et $0_{E \to E}$.

15 - En déduire $f^n(\boldsymbol{u})$ en fonction de a^n, b^n, $p(\boldsymbol{u})$ et $q(\boldsymbol{u})$.

16 - Lorsque a et b sont non nuls montrer que $f \in \mathcal{GL}(E)$, déterminer f^{-1} en fonction de p et q et prouver que f^{-1} vérifie $\mathcal{P}_{1/a,1/b}$.