FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Dans ce chapitre α, β, θ, a, b, p et q sont des nombres réels qui représentent généralement des angles, et $n\in\mathbb{Z}$.
Ce cours admet la notion d'angles ainsi que les liens entre les propriétés géométriques et les propriétés analytiques des fonctions trigonométriques.

Fonctions sinus et cosinus

• Les fonctions sinus et cosinus sont définies par les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique en fonction de son angle de relèvement θ :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

■ Les applications trigonométriques sinus et cosinus définies sur $\mathbb{R}$ sont dérivables et périodiques de période 2π ; la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$$\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta$$
$$\sin'\theta = \quad \cos\theta = \sin(\theta+\pi/2)$$
$$\cos'\theta = -\sin\theta = \cos(\theta+\pi/2)$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \cos(\pi/2-\theta) = \sin\theta \qquad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \sin(\pi/2-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\theta-\pi/2) = \sin\theta \qquad \cos(\theta+\pi/2) = -\sin\theta \qquad \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$$
$$\sin(\theta-\pi/2) = -\cos\theta \qquad \sin(\theta+\pi/2) = \cos\theta \qquad \sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$$
$$\cos(\theta+n\pi) = (-1)^n \cos\theta \qquad \sin(\theta+n\pi) = (-1)^n \sin\theta$$

■ Si les réels x et y sont les coordonnées d'un vecteur du plan de norme euclidienne un — c'est-à-dire $x^2+y^2=1$ — alors l'extrémité du vecteur est sur le cercle trigonométrique et correspond au relèvement d'un angle qui est unique dans tout intervalle de longueur 2π, généralement $]-\pi,\,\pi]$:

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2=1 \implies (\exists!\,\theta\in]-\pi,\,\pi]\ (x,y)=(\cos\theta,\sin\theta))$$

■ Plus précisément l'ensemble des angles solutions est obtenu en ajoutant un multiple entier de 2π à cet angle θ de relèvement du vecteur de coordonnées (x,y) :

$$\{\alpha\in\mathbb{R}\ /\ x=\cos\alpha \text{ ET } y=\sin\alpha\} = \theta+2\pi\mathbb{Z} \qquad \text{avec } \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

∗ Une conséquence de cette propriété est l'équivalence suivante :
$(\cos\alpha=\cos\beta \text{ ET } \sin\alpha=\sin\beta) \iff \beta-\alpha\in 2\pi\mathbb{Z} \iff \beta\in\alpha+2\pi\mathbb{Z}$

★ La résolution de ces équations trigonométriques en θ en découle :

$$\cos\theta=\cos\alpha \iff \theta\in(\alpha+2\pi\mathbb{Z})\cup(-\alpha+2\pi\mathbb{Z})$$
$$\sin\theta=\sin\alpha \iff \theta\in(\alpha+2\pi\mathbb{Z})\cup(\pi-\alpha+2\pi\mathbb{Z})$$

∗ Les solutions de ces équations particulières s'écrivent simplement :

$$\cos\theta=1 \iff \theta\in 2\pi\mathbb{Z} \qquad \sin\theta=1 \iff \theta\in\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$$
$$\cos\theta=-1 \iff \theta\in\pi+2\pi\mathbb{Z} \qquad \sin\theta=-1 \iff \theta\in-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$$
$$\cos\theta=0 \iff \theta\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \qquad \sin\theta=0 \iff \theta\in\pi\mathbb{Z}$$

▷ Résolution de l'équation trigonométrique $\cos(5x)=\sin(3x)$.

⊳⊳ Cette équation se transforme en une équation du type précédent :

$$\begin{aligned} & \cos(5x)=\sin(3x) \\ \iff & \cos(5x)=\cos(3x-\pi/2) \\ \iff & 5x=3x-\pi/2+2k\pi \text{ OU } 5x=-3x+\pi/2+2k\pi \\ \iff & 2x=-\pi/2+2k\pi \text{ OU } 8x=\pi/2+2k\pi \\ \iff & x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right) \end{aligned}$$

Relations trigonométriques

Les formules d'addition

■ Ces formules d'addition fondent la trigonométrie :

$$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \cos a\,\sin b$$

◊ Une construction géométrique à base de projections orthogonales justifie ces formules à partir des axiomes de la géométrie euclidienne.

∗ L'égalité $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ se retrouve à partir de $\cos(a-a) = 1$.

Déphasage

■ Il existe un unique $\varphi \in\,]-\pi, \pi]$ appelé déphasage qui permet de regrouper les termes de la somme ci-dessous où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$:

$$\lambda \sin\theta + \mu \cos\theta = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\Big(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin\theta + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\cos\theta\Big)$$
$$= \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,\sin(\theta+\varphi) \qquad \cos\varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

◊ L'angle φ est l'angle de relèvement d'un vecteur unitaire :

$$\Big(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\Big)^2 = 1$$
$$(x, y) = \Big(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}, \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\Big) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

∗ Une méthode similaire fondée sur les autres formules d'addition peut obtenir à des expressions en $\sin(\theta-\varphi)$ ou en $\cos(\theta\pm\varphi)$.

▹ Factorisation de $\sqrt{3}\cos x + \sin x$ et de $\sin x - \cos x$.

▹▹ Ces transformations illustrent la méthode du déphasage, différents résultats sont possibles :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\Big) \qquad \text{car } \sqrt{\sqrt{3}^{\,2}+1^2} = 2$$
$$= 2\sin\Big(x+\frac{\pi}{3}\Big) = 2\cos\Big(x-\frac{\pi}{6}\Big)$$
$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\Big) \qquad \text{car } \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}\sin\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big) = -\sqrt{2}\cos\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)$$
$$= \sqrt{2}\cos\Big(x+\frac{5\pi}{4}\Big) = \sqrt{2}\cos\Big(x-\frac{3\pi}{4}\Big)$$

Angle double

■ Le formulaire des angles doubles découle des formules d'addition, et les carrés trigonométriques s'obtiennent à partir du cosinus :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \sin(2a) = 2\sin a\,\cos a$$
$$= 2\cos^2 a - 1 \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$= 1 - 2\sin^2 a \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

∗ Les expressions $1\pm\cos a$ se simplifient en fonction de l'angle moitié :

$$1+\cos a = 2\cos^2\Big(\frac{a}{2}\Big) \qquad 1-\cos a = 2\sin^2\Big(\frac{a}{2}\Big)$$

▹ Expression de $\cos^4 a \pm \sin^4 a$ à l'aide d'angles doubles ou quadruples.

▹▹ Ces transformations appliquent le formulaire de l'angle double :

$$\cos^4 a - \sin^4 a = (\cos^2 a - \sin^2 a)(\cos^2 a + \sin^2 a) = \cos(2a)$$
$$\cos^4 a + \sin^4 a = (\cos^2 a)^2 + (\sin^2 a)^2$$
$$= \Big(\frac{1+\cos(2a)}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{1-\cos(2a)}{2}\Big)^2$$
$$= \frac{1}{4}\,(2 + 2\cos^2(2a))$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1+\cos(4a)}{2}\Big) = \frac{3+\cos(4a)}{4}$$

Produits des fonctions trigonométriques

■ Ces produits proviennent de la demi-somme et de la demi-différence des formules d'addition :

$$\cos a\,\cos b = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin a\,\sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin a\,\cos b = \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$$

∗ Le produit $\cos a\,\sin b$ est d'une part la demi-différence de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$ et d'autre part obtenue à partir de $\sin a\,\cos b$ en échangeant les rôles de a et de b :

$$\begin{aligned}\cos a\,\sin b &= \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}\\ &= \frac{\sin(b-a)+\sin(b+a)}{2} = \frac{\sin(a+b)+\sin(b-a)}{2}\end{aligned}$$

Sommes des fonctions trigonométriques

■ Ces formules sont obtenues par les identifications $p = a+b$ et $q = a-b$, c'est-à-dire $a = (p+q)/2$ et $b = (p-q)/2$, dans les formules des produits trigonométriques :

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin p - \sin q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \cos p - \cos q &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

◊ Les trois produits précédents aboutissent directement à ces égalités :

$$\left\{\begin{array}{l} p = a+b\\ q = a-b\end{array}\right. \qquad a = \frac{p+q}{2} \qquad b = \frac{p-q}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= \cos q + \cos p = \cos(a-b)+\cos(a+b)\\ &= 2\,\cos a\,\cos b = 2\,\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= \sin q + \sin p = \sin(a-b)+\sin(a+b)\\ &= 2\,\sin a\,\cos b = 2\,\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \cos p - \cos q &= -(\cos q - \cos p) = -(\cos(a-b)-\cos(a+b))\\ &= -2\,\sin a\,\sin b = -2\,\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

La dernière est obtenue en remplaçant q par $-q$:

$$\begin{aligned}\sin p - \sin q &= \sin p + \sin(-q) = 2\,\sin\left(\frac{p+(-q)}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p-(-q)}{2}\right)\\ &= 2\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2\,\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

▹ Résolution de l'équation $\cos(3x) = \sin(5x) - \sin x$.

▹▹ La différence des deux fonctions sinus aboutit à une factorisation :

$$\sin(5x) - \sin x = 2\,\cos(3x)\,\sin(2x)$$

Les solutions recherchées correspondent aux facteurs nuls :

$$\sin(5x) - \sin x - \cos(3x) = \cos(3x)(2\,\sin(2x) - 1) = 0$$

$$\cos(3x) = 0 \Longleftrightarrow 3x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Longleftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \frac{1}{2} &\Longleftrightarrow 2x \in \frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\ \cup\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\\ &\Longleftrightarrow x \in \frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\ \cup\ \frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Les solutions sur $]-\pi,\,\pi]$ sont ainsi énumérées dans l'ordre croissant ; celles sur $\mathbb{R}$ se déduisent par périodicité 2π :

$$\frac{\pi}{6}\quad \frac{\pi}{2}\quad \frac{5\pi}{6}\qquad -\frac{5\pi}{6}\quad -\frac{\pi}{2}\quad -\frac{\pi}{6}\qquad \frac{\pi}{12}\quad -\frac{11\pi}{12}\quad \frac{5\pi}{12}\quad -\frac{7\pi}{12}$$

$$-\frac{11\pi}{12} < -\frac{5\pi}{6} < -\frac{7\pi}{12} < -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6}$$

▹ Factoriser $\sin(a+b) - \sin a - \sin b$.

▹▹ Le produit correspondant à $\sin a + \sin b$ commence la factorisation :

$$\begin{aligned}&\sin(a+b) - \sin a - \sin b\\ &= \sin(a+b) - 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &= 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos(\frac{a+b}{2}) - 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)$$
$$= -4\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a}{2}\right)\,\sin\left(\frac{b}{2}\right)$$

Méthodes de vérification

$*$ Vérifier les égalités trigonométriques obtenues à la suite d'un calcul pour des valeurs particulières comme 0, π, $\pi/2$, $p = q$, etc. permet généralement de détecter les erreurs, par exemple une faute de signe. Une autre vérification possible consiste à tester que les fonctions sinus et cosinus calculées sont à valeurs dans le segment $[-1,\,1]$.

Développement et linéarisation

$*$ Le développement de $\cos(n\theta)$ et de $\sin(n\theta)$ consiste à transformer ces expressions en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ uniquement.
La linéarisation de $\cos^n\theta$ et de $\sin^n\theta$ est une écriture sous la forme d'une combinaison linéaire de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$ où $0 \le k \le n$.
La méthode la plus simple fait appel à l'exponentielle complexe et est détaillée dans le chapitre suivant sur les *complexes*.

$*$ Les deux premières égalités sont des développements, et les deux autres des linéarisations :

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\,\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\,\sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta$$
$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\cos(2\theta) \qquad \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\cos(2\theta)$$

Fonction tangente

Définition et formulaire

■ La fonction tangente est impaire et périodique de période π :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{pour } \theta \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\tan(\pi/2 - \theta) = \frac{\sin(\pi/2-\theta)}{\cos(\pi/2-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan(\theta+\pi) = \frac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$
$$\tan'\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \ge 1$$

■ Les formules d'addition de la fonction tan sont valables uniquement si tous les termes sont bien définis :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

◊ Les formules d'addition des applications sin et cos les démontrent :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b}{\cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b}$$
$$= \frac{\frac{\sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b}{\cos a\,\cos b}}{\frac{\cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b}{\cos a\,\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\,\tan b}$$

$*$ Cette différence se simplifie grâce aux angles doubles :

$$\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan(2x)} = \frac{1}{\tan x} - \frac{2(1-\tan^2 x)}{2\,\tan x} = \frac{1 - 1 + \tan^2 x}{\tan x} = \tan x$$

○ La fonction cotan est l'inverse de la fonction tan prolongée par continuité par 0 pour $\theta \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$; elle est impaire et périodique de période π :

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{définie sur } \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$
$$= \frac{1}{\tan\theta} \qquad \text{prolongée par continuité par 0 en } \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

■ L'ensemble des solutions de l'équation $\tan\theta = \tan\alpha$ est $\alpha + \pi\mathbb{Z}$:

$$\tan\theta = \tan\alpha \iff \theta \in \alpha + \pi\mathbb{Z}$$

◊ Une justification provient de la stricte croissance de l'application tan sur l'intervalle $]-\pi/2,\,\pi/2[$.

▹ Ces quotients s'expriment à l'aide de la fonction tan :

$$\frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \tan^2\left(\frac{a}{2}\right) \qquad \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} = \tan(a + \pi/4)$$

⊳⊳ Les expressions $1 \pm \cos a$ se simplifient en fonction de $a/2$:

$$\frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos(2a/2)}{1+\cos(2a/2)} = \frac{1-(1-2\,\sin^2(\frac{a}{2}))}{1+(2\,\cos^2(\frac{a}{2})-1)}$$
$$= \frac{2\,\sin^2(\frac{a}{2})}{2\,\cos^2(\frac{a}{2})} = \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

Cette démonstation est aussi possible à partir de la tangente des angles moitiés présentée dans le paragraphe suivant.

⊳⊳ La méthode des déphasages simplifie le second quotient :

$$\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a} = \frac{\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos a+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin a)}{\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos a-\frac{1}{\sqrt{2}},\sin a)}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos a+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin a}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos a-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin a} = \frac{\sin(a+\pi/4)}{\cos(a+\pi/4)} = \tan(a+\pi/4)$$

Angle moitié

■ Les fonctions trigonométriques $\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\tan\theta$ sont des fractions rationnelles de variable $t=\tan(\theta/2)$ où t est défini pour $\theta \notin \pi+2\pi\mathbb{Z}$:

$$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

◊ La première égalité provient de la formule $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$ avec $a=\theta/2$, la seconde de $\cos(2a)$ exprimée en fonction de $\cos^2 a$ puis de $\tan^2 a$, et la troisième du produit $\sin a = \tan a\,\cos a$:

$$\tan\theta = \tan(2a) = \frac{2\,\tan a}{1-\tan^2 a} = \frac{2t}{1-t^2}$$
$$\cos\theta = \cos(2a) = 2\,\cos^2 a - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 a} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin\theta = \cos(2a)\,\tan(2a) = \frac{2t}{1-t^2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Exemples de transformations trigonométriques

⊳ Le développement de $\tan(4\theta)$ en fonction de $t=\tan\theta$ est aussi possible par la fonction tan que par les fonctions sin et cos.

⊳⊳ Dans la deuxième méthode le développement du cosinus de l'angle double conserve une expression de degré homogène en fonction de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$ de façon à pouvoir revenir à $\tan\theta$ par quotient, et ne privilégie ni la fonction sin ni la fonction cos :

$$\tan(4\theta) = \frac{2\,\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)} = \frac{2\frac{2t}{1-t^2}}{1-\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2}$$
$$= \frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2-4t^2} = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$$
$$\sin(4\theta) = 2\,\sin(2\theta)\,\cos(2\theta) = 4\,\sin\theta\,\cos\theta\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$\cos(4\theta) = \cos^2(2\theta)-\sin^2(2\theta) = (\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2 - 4\,\sin^2\theta\,\cos^2\theta$$
$$= \cos^4\theta - 6\,\sin^2\theta\,\cos^2\theta + \sin^4\theta$$
$$\tan(4\theta) = \frac{4\,\sin\theta\,\cos\theta\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos^4\theta-6\,\sin^2\theta\,\cos^2\theta+\sin^4\theta} = \frac{\frac{4\,\sin\theta\,\cos\theta\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos^4\theta}}{\frac{\cos^4\theta-6\,\sin^2\theta\,\cos^2\theta+\sin^4\theta}{\cos^4\theta}}$$
$$= \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$$

⊳ Résolution de l'équation $\cos(2x)+4 = 3\sqrt{3}\,\cos x$ sur $]-\pi,\,\pi]$.

⊳⊳ Cette équation est en fait du second degré en $\cos x$:

$$\cos(2x)+4-3\sqrt{3}\,\cos x = 2\,\cos^2 x - 3\sqrt{3}\,\cos x + 3 = 0$$
$$\Delta = 27-24 = 3 > 0 \qquad \text{de racines } \frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{4}$$

Les racines sont $\sqrt{3} > 1$ et $\sqrt{3}/2$. La seule solution possible pour une fonction trigonométrique est donc $\cos x = \sqrt{3}/2$, c'est-à-dire $x = \pm\pi/6$.

⊳ Résolution de l'équation $\sqrt{6+4\,\cos^2 x} = 4-2\,\sin x$ sur $]-\pi,\,\pi]$.

⊳⊳ L'étude des coefficients justifie que les deux termes de l'équation sont définis et positifs pour tout $x\in\mathbb{R}$. Le début de la démonstration s'effectue par des équivalences :

$$
\begin{aligned}
&6 + 4\cos^2 x = (4 - 2\sin x)^2 = 16 - 16\sin x + 4\sin^2 x \geq 0\\
\Longleftrightarrow\ &6 + 4(1 - \sin^2 x) = 16 - 16\sin x + 4\sin^2 x\\
\Longleftrightarrow\ &-8\sin^2 x + 16\sin x - 6 = 0
\end{aligned}
$$

Seule la racine $r = \sin x$ comprise dans $[-1,\ 1]$ convient :

$$r = \sin x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4\times 8 \times 6}}{-16} = \frac{16 \pm 8}{16} = \frac{2 \pm 1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

Le raisonnement par équivalences aboutit exactement à l'ensemble des solutions ; il n'est pas nécessaire de vérifier que ces deux angles sont effectivement des solutions.

▹ Les fonctions $\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\tan\theta$ peuvent s'exprimer en fonction de $s = \sin\theta$ ou de $t = \tan\theta$ lorsque $\theta \in]-\pi/2,\ \pi/2[$.

▹▹ L'hypothèse $\theta \in]-\pi/2,\ \pi/2[$ justifie d'une part que $\cos\theta > 0$ et d'autre part que $\sin\theta$ et $\tan\theta$ sont de même signe :

$$
\begin{aligned}
0 \leq \cos\theta &= +\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - s^2}\\
\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}}\\
0 \leq \cos\theta &= +\sqrt{\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\\
\sin\theta &= \tan\theta\ \cos\theta = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}
\end{aligned}
$$

▹ Simplification du produit suivant :

$$\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

▹▹ La simplification de ce produit repose sur $\sin(2a) = 2\sin a\ \cos a$:

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\\
&= \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\theta\\
&= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\theta\\
&= \frac{1}{2^2} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ \cos\theta\\
&= \frac{1}{2^3} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-3}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-3}}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ \cos\theta\\
&= \qquad \cdots \qquad \cdots\\
&= \frac{1}{2^{n-2}} \sin\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ \cos\theta\\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ \cos\theta = \frac{1}{2^n} \sin\theta\ \cos\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2^{n+1}}\\
&\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(2\theta)}{2^{n+1}\ \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \qquad \text{si } \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \neq 0
\end{aligned}
$$

L'équation $\sin(\theta/2^n) = 0$ est équivalente à $\theta \in 2^n\pi\mathbb{Z}$ et $\theta = 2^n p\pi$ où $p \in \mathbb{Z}$.
Si l'entier p est pair alors le produit vaut 1 car tous les angles $\theta/2^k$ sont des multiples de 2π, si au contraire p est impair, alors les facteurs sont 1 pour $k > 0$ et -1 pour $k = 0$:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 0 \Longleftrightarrow \theta = 2^n p\pi \quad \text{où } p \in \mathbb{Z}$$

$$\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2^n p\pi}{2^k}\right) = (-1)^p = \cos(p\pi)$$