DEVOIR DU MERCREDI 16 AVRIL 2014

SOUS-ESPACES DE MATRICES

1 - Les produits de matrices transposées vérifient ${}^{t}(MN) = {}^{t}N\,{}^{t}M$. Notons $M = (m_{i,j})_{i,j}$, $N = (n_{i,j})_{i,j}$ et le produit $P = MN = (p_{i,j})_{i,j}$ ces matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et notons de même $M' = (m'_{i,j})_{i,j} = {}^{t}M$, $N' = (n'_{i,j})_{i,j} = {}^{t}N$, $P' = {}^{t}P$ et $Q = N'\,M'$. Les indices i et j appartiennent à $[\![1, n]\!]$, et ainsi $m'_{i,j} = m_{j,i}$ et $n'_{i,j} = n_{j,i}$.

$$p_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j} \qquad p'_{i,j} = p_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{j,k} n_{k,i}$$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} n'_{i,k} m'_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} n_{k,i} m_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} m_{j,k} n_{k,i} = p'_{i,j}$$

Ainsi $P' = {}^{t}P = Q = {}^{t}N\,{}^{t}M$ car ces matrices sont carrées d'ordre n et ont les mêmes coefficients.

La transposition est linéaire : ${}^{t}(\lambda M + \mu N) = \lambda\,{}^{t}M + \mu\,{}^{t}N$, et est une involution de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ${}^{t}({}^{t}M) = M$. La matrice $M + {}^{t}M$ est symétrique et la matrice $M - {}^{t}M$ est antisymétrique :

$$\begin{aligned} {}^{t}(M + {}^{t}M) &= {}^{t}M + {}^{t}({}^{t}M) = M + {}^{t}M && M + {}^{t}M \in \mathcal{S} \\ {}^{t}(M - {}^{t}M) &= {}^{t}M - {}^{t}({}^{t}M) = -(M - {}^{t}M) && M - {}^{t}M \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Les matrices produits ${}^{t}M\,M$ et $M\,{}^{t}M$ sont symétriques :

$$\begin{aligned} {}^{t}({}^{t}M\,M) &= {}^{t}M\,{}^{t}({}^{t}M) = {}^{t}M\,M && {}^{t}M\,M \in \mathcal{S} \\ {}^{t}(M\,{}^{t}M) &= {}^{t}({}^{t}M)\,{}^{t}M = M\,{}^{t}M && M\,{}^{t}M \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

2 - Vérifions que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par construction $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel. La matrice nulle $(0)_n$ est antisymétrique car $-(0)_n = (0)_n = {}^{t}(0)_n$.

Vérifions que $\mathcal{A}$ est stable par combinaisons linéaires, pour cela soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathcal{A}^2$:

$$\begin{gathered} {}^{t}M = -M \qquad {}^{t}N = -N \\ {}^{t}(\lambda M + \mu N) = \lambda\,{}^{t}M + \mu\,{}^{t}N = -\lambda M - \mu N = -(\lambda M + \mu N) \\ \lambda M + \mu N \in \mathcal{A} \end{gathered}$$

Ces trois vérifications de la propriété caractéristique des sous-espaces vectoriels justifient que $\mathcal{A}$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La méthode est la même pour $\mathcal{S}$.

Par construction $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel. La matrice nulle $(0)_n$ est symétrique car $(0)_n = {}^{t}(0)_n$.

Vérifions que $\mathcal{S}$ est stable par combinaisons linéaires, ainsi soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in \mathcal{S}^2$:

$$\begin{gathered} {}^{t}M = M \qquad {}^{t}N = N \\ {}^{t}(\lambda M + \mu N) = \lambda\,{}^{t}M + \mu\,{}^{t}N = \lambda M + \mu N \\ \lambda M + \mu N \in \mathcal{S} \end{gathered}$$

Ces trois vérifications justifient que $\mathcal{S}$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit M une matrice symétrique : ${}^{t}M = M$ et $m_{i,j} = m_{j,i}$. La décomposition dans la base canonique aboutit au regroupement des coefficients $m_{i,j}$ et $m_{j,i} = m_{i,j}$ des matrices $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{1 \le i,j \le n} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} + \sum_{n \ge i > j \ge 1} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{n \ge i > j \ge 1} m_{j,i} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{1 \le i < j \le n} m_{i,j} E_{j,i} + \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} \\ &\qquad \text{échange des noms de indices } i \text{ et } j \text{ dans la deuxième somme} \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} m_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} \end{aligned}$$

Ainsi toute matrice symétrique se décompose sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices symétriques $E_{p,q} + E_{q,p}$ quand $1 \le p < q \le n$ et des matrices diagonales, donc symétriques $E_{p,p}$.

Notons $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ la concaténation des deux familles $(E_{p,q} + E_{q,p})_{1 \le p < q \le n}$ et $(E_{p,p})_{1 \le p \le n}$ avec $n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$ matrices.

Les égalités précédentes démontrent $\mathcal{S} \subset \operatorname{Vect} \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, toutes les matrices de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ sont symétriques, ainsi $\operatorname{Vect} \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$.

En conclusion $\mathcal{B_S}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}$.
Montrons que cette famille de matrices est libre. Soit la combinaison linéaire des matrices de $\mathcal{B_S}$:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i})+\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}E_{i,i}=M=(0)_n$$

Ainsi $m_{i,j}=a_{i,j}=0$ si $i<j$ ou $i=j$ et $m_{i,j}=a_{j,i}=0$ si $i>j$. Dans tous les cas les $n(n+1)/2$ coefficients $a_{i,j}=0$ sont nuls. La famille $\mathcal{B_S}$ est donc libre.
En conclusion la famille $\mathcal{B_S}$ est une base de $\mathcal{S}$.
La méthode est similaire $\mathcal{A}$. Soit M une matrice antisymétrique, c'est-à-dire ${}^{\mathrm{t}}M=-M$ et $m_{i,j}=-m_{j,i}$. Remarquons que dans ce cas des matrices antisymétriques les termes diagonaux sont nécessairement nuls : $m_{i,i}=-m_{i,i}$ donc $m_{i,i}=0$ dans $\mathbb{R}$.
La décomposition dans la base canonique aboutit au regroupement des coefficients $m_{i,j}$ et $m_{j,i}=-m_{i,j}$ des matrices $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j}+\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i}+\sum_{n\geq i>j\geq 1} m_{i,j}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j}+\sum_{n\geq i>j\geq 1}(-m_{j,i})E_{i,j} \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}E_{i,j}-\sum_{1\leq j<i\leq n} m_{i,j}E_{j,i}=\sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}(E_{i,j}-E_{j,i}) \end{aligned}$$

Ainsi toute matrice antisymétrique se décompose sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices antisymétriques $E_{p,q}-E_{q,p}$ quand $1\leq p<q\leq n$.
Notons $\mathcal{B_A}$ la famille $(E_{p,q}-E_{q,p})_{1\leq p<q\leq n}$ avec $n(n-1)/2$ matrices. Les égalités précédentes démontrent $\mathcal{A}\subset \operatorname{Vect}\mathcal{B_A}$, toutes les matrices de $\mathcal{B_A}$ sont antisymétriques, ainsi $\operatorname{Vect}\mathcal{B_A}\subset\mathcal{A}$.
En conclusion $\mathcal{B_A}$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}$.
Montrons que cette famille de matrices est libre. Soit la combinaison linéaire des matrices de $\mathcal{B_A}$:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}(E_{i,j}-E_{j,i})=M=(0)_n$$

Ainsi $m_{i,j}=a_{i,j}=0$ si $i<j$, et $m_{i,j}=-a_{j,i}=0$ si $i>j$. Dans tous les cas les $n(n-1)/2$ coefficients $a_{i,j}=0$ sont nuls. La famille $\mathcal{B_A}$ est donc libre.
En conclusion la famille $\mathcal{B_A}$ est une base de $\mathcal{A}$.

3 - Soit $M\in\mathcal{A}\cap\mathcal{S}$. Ainsi ${}^{\mathrm{t}}M=M=-M$ donc $2M=(0)_n$ et $M=\dfrac{1}{2}(0)_n=(0)_n$. Donc le sous-espace intersection vérifie les deux inclusions $\{(0)_n\}\subset\mathcal{A}\cap\mathcal{S}\subset\{(0)_n\}$ et donc l'égalité $\mathcal{A}\cap\mathcal{S}=\{(0)_n\}$ des sous-espaces en somme directe.
Un argument de dimension évite de construire la décomposition sur $\mathcal{A}\oplus\mathcal{S}$ d'une matrice quelconque :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{A}\oplus\mathcal{S}) &= \dim\mathcal{A}+\dim\mathcal{S}-\dim(\mathcal{A}\cap\mathcal{S}) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-0=n^2=\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{A}\oplus\mathcal{S} &\subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

En conclusion l'égalité des dimensions de l'espace vectoriel et du sous-espace somme justifie l'égalité $\mathcal{A}\oplus\mathcal{S}=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les dimensions ont été calculées dans la question précédente :

$$\dim\mathcal{A}=\frac{n(n-1)}{2}\qquad \dim\mathcal{S}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Une autre possibilité pour démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espaces vectoriels consiste à les exprimer comme noyaux d'applications linéaires :

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{S} &\Longleftrightarrow {}^{\mathrm{t}}M=M \\ &\Longleftrightarrow M-{}^{\mathrm{t}}M=(0)_n \\ &\Longleftrightarrow (\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}-{}^{\mathrm{t}}\bullet)(M)=(0)_n \\ &\Longleftrightarrow M\in\ker(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}-{}^{\mathrm{t}}\bullet) \end{aligned}$$

L'application $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}+{}^{\mathrm{t}}\bullet$ est une combinaison d'applications linéaires et est donc linéaire : $\mathcal{S}=\ker(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}-{}^{\mathrm{t}}\bullet)$.
De même $\mathcal{A}$ est le noyau $\mathcal{A}=\ker(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}+{}^{\mathrm{t}}\bullet)$.

4 - L'application $M\mapsto\dfrac{1}{2}(M-{}^{\mathrm{t}}M)$ est une combinaison linéaire des applications $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et ${}^{\mathrm{t}}\bullet$ linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est donc linéaire.
La composition suivante démontre $p\circ p=p$ pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
(p\circ p)(M) &= p\Big(\frac{1}{2}(M-{}^{\mathrm{t}}M)\Big) = \frac{1}{2}p(M) - \frac{1}{2}p({}^{\mathrm{t}}M)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(M-{}^{\mathrm{t}}M)\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}({}^{\mathrm{t}}M - {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}M))\Big)\\
&= \frac{1}{4}(M-{}^{\mathrm{t}}M-{}^{\mathrm{t}}M+{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}M)) = \frac{1}{4}(2M-2\,{}^{\mathrm{t}}M)\\
&= \frac{1}{2}(M-{}^{\mathrm{t}}M) = p(M)
\end{aligned}
$$

La vérification de $\ker p = \mathcal{S}$ provient de ces équivalences :

$$
\begin{aligned}
M\in\ker p &\iff p(M) = (0)_n\\
&\iff \frac{1}{2}(M-{}^{\mathrm{t}}M) = (0)_n\\
&\iff M = {}^{\mathrm{t}}M\\
&\iff M\in\mathcal{S}
\end{aligned}
$$

Toute projection p sur E vérifie $\operatorname{Im} p = \big\{\boldsymbol{u}\in E \;/\; p(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\big\}$. Ces équivalences démontrent $\operatorname{Im} p = \mathcal{A}$:

$$
\begin{aligned}
M\in\operatorname{Im} p &\iff p(M) = M\\
&\iff \frac{1}{2}(M-{}^{\mathrm{t}}M) = M\\
&\iff M-{}^{\mathrm{t}}M = 2M\\
&\iff M = -{}^{\mathrm{t}}M\\
&\iff M\in\mathcal{A} \qquad \operatorname{Im} p = \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

5 - Ces quatre matrices définissent la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice de l'application linéaire p dépend de l'ordre d'énumération retenu :

$$
\mathcal{B}c = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)
$$

$$
p\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}
$$

$$
p\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1/2\\1/2&0\end{pmatrix} \qquad p\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1/2\\-1/2&0\end{pmatrix}
$$

La matrice de l'application linéaire p est d'ordre 4 car $p\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$. Les coefficients de la matrice sont colonne par colonne les coordonnées des images des vecteurs de la base choisie :

$$
\operatorname{mat}(p,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1/2&-1/2&0\\0&-1/2&1/2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

MATRICES ET POLYNÔMES

6 - Vérifions que la famille des trois colonnes $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3)$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension trois. Soit la combinaison linéaire de valeur le vecteur nul :

$$
\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = \begin{pmatrix}\alpha+2\beta+2\gamma\\ \alpha+\gamma\\ \alpha+\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{cases}\alpha = -\gamma = -\beta\\ \alpha+2\beta+2\gamma = 0\end{cases} \qquad \text{donc } -3\alpha = 0, \text{ puis } (\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0)
$$

La famille (C_1, C_2, C_3) est libre avec 3 vecteurs, et donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

7 - La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est, colonne par colonne, les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$
P = (p_{i,j})_{i,j} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \qquad \boldsymbol{u}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\,\boldsymbol{u}_i
$$

$$
\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n) \qquad \mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \cdots, \boldsymbol{u}'_n)
$$

Par construction $P_{bc\to\mathcal{B}} = M$. La matrice de passage inverse $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}c}$ demande de décomposer la base canonique $\mathcal{B}c = (E_1, E_2, E_3)$ de $\mathbb{R}^3$ en fonction de $\mathcal{B}$. Remarquons d'abord $C_1 - C_2 - C_3 = -3E_1$.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= -\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \frac{1}{3}C_3\\
E_2 &= C_3 - 2E_1 = \frac{2}{3}C_1 - \frac{2}{3}C_2 + \frac{1}{3}C_3 \qquad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}c} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\\
E_2 &= C_2 - 2E_1 = \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 - \frac{2}{3}C_3
\end{aligned}
$$

Le produit $P_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}}\,P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}c} = \mathbb{1}_3$ est une vérification possible.

8 - Le produit AP est un polynôme, l'application φ est bien définie. La distributivité de la multiplication et les règles de calcul usuelles dans l'algèbre $\mathbb{R}[X]$ justifient que l'application φ est linéaire :

$$
\varphi(\lambda P + \mu Q) = A(\lambda P + \mu Q) = \lambda AP + \mu AQ = \lambda\,\varphi(P) + \mu\,\varphi(Q)
$$

La définition même de l'ensemble $A\,\mathbb{R}[X]$ des multiples de A définit $\operatorname{Im}\varphi$:

$$\operatorname{Im}\varphi = A\,\mathbb{R}[X] = \left\{AP \;\big/\; P\in\mathbb{R}[X]\right\} = \left\{Q\in\mathbb{R}[X] \;\big/\; A \mid Q\right\}$$

Tout espace vectoriel contient le vecteur nul : $0_{\mathbb{R}[X]}\in\ker\varphi$. L'anneau $\mathbb{R}[X]$ est intègre : $AP = 0_{\mathbb{R}[X]}$ entraîne que A ou P sont des polynômes nuls. Ainsi $A \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $AP = 0_{\mathbb{R}[X]}$ entraîne que $P = 0$, ces deux inclusions justifient donc $\ker\varphi = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$.
L'application φ est donc injective. L'application φ n'est pas surjective car $X^0 \notin A\mathbb{R}[X]$, et elle n'est donc pas bijectrive.

9 - Les notations de l'énoncé définissent ces égalités :

$$P = BM + R \quad Q = BN + S \qquad \deg R < \deg B \quad \deg S < \deg B$$

L'existence et l'unicité du reste de la division euclidienne de P par B prouvent que l'application $\psi : P \mapsto R$ est bien définie.
Les opérations sur l'anneau des polynômes énoncent :

$$\begin{aligned}\lambda P + \mu Q &= \lambda(BM + R) + \mu(BN + S)\\ &= B(\lambda M + \mu N) + (\lambda R + \mu S)\\ \textsf{ET}\ \deg(\lambda R + \mu S) &\leq \max(\deg(\lambda R), \deg(\mu S))\\ &\leq \max(\deg R, \deg S) < \deg B\end{aligned}$$

Ces deux propriétés démontrent que le reste de la combinaison linéaire $\lambda P + \mu Q$ est la combinaison linéaire $\lambda R + \mu S$ des restes. L'application ψ est donc linéaire.
L'application ψ n'est pas injective car $\psi(B) = \psi(0_{\mathbb{R}[X]}) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
L'application ψ n'est pas surjective car B ne peut pas être, pour une raison de degré, le reste de la division de P par B. L'application ψ n'est pas bijective.
Le polynôme P est dans le noyau $\ker\psi$ si et seulement si le reste de P par B est nul, c'est-à-dire $B \mid P$:

$$\ker\psi = \left\{P\in\mathbb{R}[X] \;\big/\; B \mid P\right\} = B\mathbb{R}[X] \qquad \operatorname{Im}\psi = \mathbb{R}_2[X]$$

La démonstration de $\operatorname{Im}\psi = \mathbb{R}_2[X]$ repose sur deux inclusion. Le reste R de la division de P par B, par définition, vérifie $\deg R \leq 2$ et $R\in\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi $\operatorname{Im}\psi \subset \mathbb{R}_2[X]$. Réciproquement si $P\in\mathbb{R}_2[X]$ alors $P = 0\cdot B + P$ et $P = R$, donc $\mathbb{R}_2[X] \subset \operatorname{Im}\psi$.

10 - La composition d'endomorphismes $\psi\circ\varphi$ sur $\mathbb{R}[X]$ est une application linéaire. En outre les images vérifient ces inclusions :

$$\operatorname{Im}(\psi\circ\varphi) \subset \operatorname{Im}\psi = \mathbb{R}_2[X]$$
$$\operatorname{Im}((\psi\circ\varphi)_{/\mathbb{R}_2[X]}) \subset \operatorname{Im}(\psi\circ\varphi) \subset \operatorname{Im}\psi = \mathbb{R}_2[X]$$

Ainsi $\psi\circ\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R}_2[X])$. La restriction à un sous-espace d'une application linéaire est linéaire, donc $\rho \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. L'image de la base canonique $\mathcal{B}c(1, X, X^2)$ repose sur ces divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned}B &= X^3 + X - 2\\ A &= X^2 + X + 1 = 0\cdot B + A = 0\cdot B + X^2 + X + 1\\ AX &= X^3 + X^2 + X = 1\cdot B + X^2 + 2\\ AX^2 &= X^4 + X^3 + X^2 = (X+1)\cdot B + X + 2\end{aligned}$$

$$\operatorname{mat}(\rho, \mathcal{B}c, \mathcal{B}c) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = M$$

11 - La matrice M de ρ est une matrice de passage, donc une matrice inversible de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. Ainsi $\rho \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}_2[X])$. Les colonnes de $M^{-1} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}c}$ définissent les coordonnées des images par ρ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi les deuxièmes et troisièmes colonnes de M^{-1} :

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}\rho^{-1}(X) &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X^2\\ \rho^{-1}(X^2) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}X - \frac{2}{3}X^2\end{aligned}$$

12 - L'équation de Bezout $AU + BV = 1 = X^0$ se réécrit en $AU = 1 - BV$ sous la forme d'une division euclidienne, et traduit $\rho(U) = 1$, ainsi $U = \rho^{-1}(X^0) = \dfrac{1}{3}(-1 + X + X^2)$. Le calcul de V s'obtient par la division euclidienne de $1 - AU$ par B :

$$\begin{aligned}1 - AU &= 1 - \frac{1}{3}(1 + X + X^2)(-1 + X + X^2)\\ &= \frac{1}{3}(4 - X^2 - 2X^3 - X^4)\\ &= \frac{1}{3}(X^3 + X - 2)(-X - 2) + 0 = BV\\ V &= \frac{1}{3}(-X - 2)\end{aligned}$$

Les calculs polynomiaux peuvent être fait avec Sage de cette façon :

```
sage: Pol= QQ[x]; PolA= Pol(x^2+x+1); PolB= Pol(x^3+x-2)
sage: PolU = Pol(-1/3+x/3+x^2/3) ; 1-PolA*PolU
          -1/3*x^4 - 2/3*x^3 - 1/3*x^2 + 4/3
sage: ((1-PolA*PolU) % PolB, (1-PolA*PolU) // PolB
                    (0, -1/3*x - 2/3)
```

SÉRIE ET INTÉGRALE

13 - La suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est croissante car définie par sommes de termes positifs : $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq S_n$. Cette suite est majorée, par comparaison avec une intégrale :

$$\text{pour } 2 \leq k \leq n : \ 0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 1 - \frac{1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Le théorème des suites croissante et majorée justifie que la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$:

$$S_2 = \frac{5}{4} \leq \ell \leq 2$$

Par ailleurs la minoration suivante minore cette limite :

$$\text{pour } 2 \leq k \leq n : \ \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Les deux termes de l'inégalité large ont une limite, donc la suite $(S_n)_n$ converge vers $\ell \geq 1$. La minoration précédente avec $S_2 = 5/4$ est plus précise.

14 - Ces suites des sommes partielles sont notées T_n, U_n et V_n :

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} S_N \qquad \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \lim_{N\to+\infty} T_N = \frac{1}{4} \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{4}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$U_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = S_{2N+1} - T_N$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \lim_{N\to+\infty} U_n = \lim_{N\to+\infty} S_N - \lim_{N\to+\infty} T_N = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

La suite $(S_{2N+1})_N$ est une suite extraite de $(S_N)_N$ et converge vers la même limite $\pi^2/6$. La suite $(V_N)_N$ ci-dessous ajoute les termes d'ordre pair et soustrait les termes d'ordre impair. Le plus grand entier pair inférieur ou égal à N est $2\lfloor N/2 \rfloor$, et le plus grand entier impair inférieur ou égal à N est $2\lfloor (N-1)/2 \rfloor + 1$. Ces deux suites ne sont pas des suites extraites car les applications $\varphi(N) = \lfloor N/2 \rfloor$ et $\varphi(N) = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$ ne sont pas strictement croissantes, mais les limites infinies $\lim\limits_{N\to+\infty} \lfloor N/2 \rfloor = \lim\limits_{N\to+\infty} \lfloor (N-1)/2 \rfloor = +\infty$ justifient les limites de ces deux suites issues de $(T_N)_N$ et $(U_N)_N$:

$$V_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2} = T_{\lfloor N/2 \rfloor} - U_{\lfloor (N-1)/2 \rfloor}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{N\to+\infty} V_N = \lim_{N\to+\infty} T_N - \lim_{N\to+\infty} U_n = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$$

15 - La fonction auxiliaire φ étudiée sur $t \in \mathbb{R}_+$ est la suivante :

$$\varphi(t) = \ln(1+t) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, t^k$$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}\, t^{k-1} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k\, t^k$$
$$= \frac{1}{1+t} - \frac{1 - t^{2n}}{1+t} = \frac{t^{2n}}{1+t} \geq 0$$

t	0	$+\infty$
$\varphi'(t)$	0 $+$	
$\varphi(t)$	$0 \nearrow +$	

Ainsi $\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, t^k \leq \ln(1+t)$.

16 - La formule de Taylor reste intégral demande les dérivées successives de $\ln(1+t)$ en $t=0$:

$$\begin{array}{ll}
f(t) = \ln(1+t) & f(0) = 0 \\
f'(t) = \dfrac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} & f'(0) = 1 \\
f''(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2} = (-1)(1+t)^{-2} & f'(0) = -1 \\
f^{(3)}(t) = \dfrac{1 \cdot 2}{(1+t)^3} & f'(0) = 2! \\
f^{(4)}(t) = -\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+t)^4} = & f'(0) = -3! \\
f^{(5)}(t) = \dfrac{(-1)^4 4!}{(1+t)^5} & f'(0) = 4! \\
f^{(n)}(t) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n} & f'(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \\
f^{(2n+2)}(t) = \dfrac{(-1)^{2n+1}(2n+1)!}{(1+t)^{2n+2}} & f'(0) = -(2n+1)!
\end{array}$$

Le reste intégral est négatif, à cause de la puissance en $(-1)^{2n+1}$:

$$I_n = \int_0^t f^{(2n+2)}(u) \frac{(t-u)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\mathrm{d}u \leq 0$$

$$f(t) = \ln(1+t) = f(0) + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)(t-0)^k}{k!} + I_n$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!\,t^k}{k!} + I_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,t^k + I_n$$

$$\ln(1+t) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,t^k \qquad \text{car } I_n \leq 0$$

17 - Les deux questions précédentes démontrent cet encadrement :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,t^k \leq \ln(1+t) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,t^k$$

Après quotient par t, les deux termes extrêmes restent polynomiaux en t, et le terme central se prolonge par continuité en 0 car cette limite est la définition de la dérivée :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t) - \ln 1}{t-0} = \ln'(1) = 1/1 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,t^{k-1} \leq \frac{\ln(1+t)}{t} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,t^{k-1}$$

L'intégration sur $[0,\,1]$ aboutit à l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,t^{k-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

$$= -V_{2n} \leq \frac{\ln(1+t)}{t} \leq -V_{2n+1}$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{k-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

La suite $(V_n)_n$ converge vers $-\pi^2/12$, donc l'intégrale de l'application continue sur $[0,\,1]$, après prolongement par continuité implicite, est indépendante de n de valeur $\pi^2/12$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}$$

18 - Une intégration par partie transforme l'intégrale suivante par dérivation de $\ln t$ et intégration de $1/(1+t)$:

$$\int_h^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t \cdot \ln(1+t)\Big]_h^1 - \int_h^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

La limite en $h = 0$ de $\ln h \cdot \ln(1+h) \underset{t\to 0}{\sim} h \ln h$ est nulle par les relations de comparaison usuelles. La limite s'en déduit :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} F(h) = -\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \int_h^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{12}$$