PROBABILITÉS DISCRÈTES hors variables aléatoires

Les probabilités de ce chapitre opèrent sur un ensemble fini Ω. *L'application* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\,1]$ *vérifie* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *et est* σ*-additive :*

$$\forall\,(A,B)\in\mathcal{P}(\Omega)^2 \quad A\cap B=\emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$$

1 - Premières conséquences :

- $\Omega \neq \emptyset$, $\mathbb{P}$ est croissante, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- formule du crible : $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \quad & \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)\\ & -\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap C)\\ & +\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

2 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ de façon à ce que l'univers $\Omega=\{a,b,c\}$ possède une probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant $\mathbb{P}(\{a,b\})=x$ et $\mathbb{P}(\{a,c\})=y$.

3 - Un exemple de probabilité uniforme : urne sans ou avec remise.
Une urne $\mathcal{U}$ contient 2 boules jaunes, 4 boules rouges et 5 boules vertes, déterminer la probabilité p_1 de tirer sans remise un sous-ensemble de trois boules d'une même couleur, celle p_2 de faire un tirage bicolore, et celle p_3 d'un tirage tricolore,
déterminer de même les trois probabilités p'_1, p'_2 et p'_3 lorsque ce tirage est effectué avec remise,
calculer enfin les probabilités q et q' de faire un tirage dans l'ordre, d'une boule jaune, puis rouge, puis verte, lors du tirage successif des boules une à une, dans les deux cas sans remise et avec remise.

4 - Probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_C(A)=\mathbb{P}(A|C)=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)}$.

- la probabilité conditionnelle est une probabilité dès que $\mathbb{P}(C)\neq 0$,
- formule de Bayes : $\mathbb{P}_C(A)\,\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}_A(C)\,\mathbb{P}(A)$
- formule des probabilités totales sur un système complet :

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{C_i}(A)\,P(C_i)$$

où les C_i sont de réunion $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} C_i=\Omega$,
et les C_i incompatibles deux à deux ;

- formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\,\cdots\,\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

5 - Évènements indépendants :

- A et B sont indépendants si etseulement si $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.
- trois événements sont mutuellement indépendants si et seulement si ils vérifient toutes ces égalités :

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) \qquad \mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) \qquad \mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C)$$

- trois événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement indépendants dans leur ensemble.
par exemple dans un jeu de *pile ou face* à deux pièces les trois évènements *la pièce a tombe sur pile*, *la pièce b tombe sur pile* et *les deux pièces tirent la même valeur* sont indépendants deux à deux sans être mutuellement indépendants.
- les événements contraires d'événements indépendants sont indépendants ; si les événements A, B et C sont mutuellement indépendants alors $A\cap B$ et C sont indépendants, de même $A\cup B$ et C, etc.
- La probabilité d'une réunion d'événements mutuellement indépendants $(A_k)_{k=1}^{n}$ se calcule par les intersections de leurs contraires.