SÉRIES NUMÉRIQUES

1 - Liens et notations entre séries et les suites :

• Définitions de la série $\sum_n u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: une suite définie par une somme,

de la valeur d'un terme $\sum_{n=1}^{N} u_n \in \mathbb{R}$ des sommes partielles,

de la somme d'une série convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$.

• toute série est la suite de ses sommes partielles : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$,

toute suite est une série de différences $(u_n)_n = \sum_n u_n - u_{n-1}$ où $u_{-1} = 0$,

• l'espace vectoriel des séries formelles $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,

le sous-espace $\mathcal{C}$ des séries convergentes,

l'application $\sum_n u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{R})$, par linéarité des limites,

2 - Propriétés directement issues des suites :

• condition nécessaire de convergence, critère trivial,

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

utilisation de la contraposée pour montrer qu'une série diverge,

• exemple, la série harmonique $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge par la divergence de la suite extraite $(H_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$(H_n)_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \qquad H_{2^{n+1}} - H_{2^n} = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$H_{2^n} - H_1 = \sum_{k=1}^{n} H_{2^k} - H_{2^{k-1}} \geq \frac{n}{2} \quad \text{donc } \frac{n}{2} + 1 \leq H_{2^n} \text{ diverge vers } +\infty$$

• exemple de série télescopique :

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ à calculer par décomposition en éléments simples.

• toute série à terme général positif est croissante,

une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge par majoration :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + (1 - \frac{1}{N}) \leq 2$$

• si $(a_n)_n$ est une suite décroissante et de limite nulle, donc positive, alors $\sum_n (-1)^n a_n$ est une série convergente,

les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes, donc de même limite, ainsi la suite $(S_n)_n$ converge vers la même limite.

3 - Exemples de calcul de séries convergentes :

• série géométrique et dérivation des sommes partielles :

$$\text{pour } |q| < 1 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \Big(\sum_{k=0}^{n} q^k \Big)' = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)q^n(1-q) + q^{n+1}}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k q^k = q \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k\, q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$$

• série obtenue par la formule de Taylor reste intégral :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = f(b) - \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t$$

$$\text{avec } f(t) = \ln(1+t) \text{ sur } [0,\, 1] : f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{(1+t)^k}$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\,(k-1)! \qquad I_n = \int_0^1 f^{(n+1)}(t)\, \frac{(1-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t$$

$$|I_n| \leq \int_0^1 (1-t)^n\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$$

• sur le même principe $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = e^{-x}$,

4 - Crière de d'Alembert des séries à termes positifs :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = \ell < 1 \Longrightarrow \sum\limits_n u_n$ converge
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = \ell > 1 \Longrightarrow \sum\limits_n u_n$ diverge trivalement
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = \ell = 1 \Longrightarrow \sum\limits_n u_n$ ne permet pas de conclure

$\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

- preuve partir d'un certain rang N de la convergence,

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q = \dfrac{1+\ell}{2} < 1$ pour $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$, ainsi $u_n \leq \dfrac{u_N}{q^N} q^n$.

5 - Théorèmes de comparaisons des séries à termes positifs :

- Dans le cas $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_n v_n \text{ converge ET } 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$$

$$\sum_n v_n \text{ diverge} \Longrightarrow \sum_n u_n \text{ diverge, c'est-à-dire ne converge pas,}$$

démonstration par inégalité sur les sommes partielles,

- dans le cas où $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang N

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_n v_n \text{ converge}$$

par le théorème précédent sur les sommes à partir de N,

- dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et sont à valeurs positives,

$\exists\, (N, M) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}+ \quad \forall n \geq N \quad u_n \leq M v_n$

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_n v_n \text{ converge}$$

par le théorème précédent sur $M v_n$ à la place de v_n.

- dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et l'une est à valeurs positives,

alors l'autre est positive à partir d'un certain rang et,

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_n v_n \text{ converge}$$

l'équivalence provient de $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$,

6 - Comparaison d'une intégrale $\sum\limits_n f(n)$ et d'une série $\int f(t)\,\mathrm{d}t$,

- cas d'une application f décroissante, positive et de limite nulle :

$$0 \leq f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n-1)$$

$$0 \leq \sum_{n=p+1}^{q+1} f(n) \leq \int_p^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{q} f(n) \leq \int_{p-1}^{q} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p-1}^{q-1} f(n)$$

la suite des intégrales $\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et la série $\sum\limits_n f(n)$ sont croissantes,
il y a convergence si et seulement si elles sont majorées.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_n f(n) \text{ converge}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{+\infty} f(n) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{p-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

- la série de Riemann $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$,

à partir de $\int \dfrac{1}{t^a}\,\mathrm{d}t$, par exemple $\sum\limits_n \dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge.

- sur le même principe $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$,

7 - La suite des restes $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ de la série $\sum\limits_n u_n$ convergente,

équivalence $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^a} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{(a-1)\, n^{a-1}}$, comparaison à l'intégrale.

8 - Exemples d'étude de convergence de séries :

- par des équivalents et des développements limités,

$\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1+n^{-1}) - n^{-1}$ converge, $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1+n^{-1/2}) - n^{-1/2}$ diverge.

9 - Cas des séries réelles et complexes :

- définition de l'absolue convergence, $\sum\limits_n |u_n|$ converge,
- l'absolue convergence entraîne la convergence,

dans le cas réel $0 \leq |u|_n + u_n \leq 2|u_n|$,
dans le cas complexe $|\operatorname{re}(u_n)| \leq |u|_n$ et $|\operatorname{im}(u_n)| \leq |u_n|$.

la réciproque est fausse $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$.