# CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE

1 - Applications uniformément continues :
Définition d'une application uniformément continue,
toute application uniformément continue est continue,
l'application carré $t \mapsto t^2$ : continue et non uniformément continue.

2 - Théorème de Heine :
• Rappel de « toute application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes », à partir du théorème de Bolzano-Weiertrass des suites extraites.
• Si $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors $f$ est uniformément continue.

3 - Construction des intégrales des applications en escalier :
• définition d'une application en escalier et d'une de ses subdivisions,
l'espace vectoriel des applications en escalier,
choix de la subdivision réunion des subdivisions des applications pour montrer que la somme de ces applications en escalier est en escalier,
• intégrale d'une application en escalier sur un segment,
la valeur de l'intégrale est indépendante de la subdivision,
l'intégrale est linéaire, additive et positive,
conséquences sur les inégalités et les valeurs absolues.

4 - Approximation des applications continues sur un segment :
• théorème d'approximation uniforme d'une application continue sur un segment par une application en escalier, par le théorème de Heine,
• approximations uniformes par défaut et par excès, à l'aide du théorème précédent.

5 - Intégrales des applications continues sur un segment :
• Construction des ensembles non vide $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{E}$ des intégrales des approximations par défaut et par excès par des applications en escalier d'une application $f$ sur un segment,
• l'ensemble $\mathcal{D}$ est non vide et majoré, et $\mathcal{E}$ est non vide et minoré,
• $\sup \mathcal{D} = \inf \mathcal{E} = \displaystyle\int_a^b f$ démontré par deux inégalités, avec les approximations uniformes.



6 - Propriétés des intégrales des applications continues :
• L'intégrale des applications continues est compatible avec celle des applications en escalier,
• cette intégrale est linéaire, additive et positive,
• cas des intégrales de valeur nulle des applications continues et à valeurs positives sur un segment.

7 - Intégrales des applications continues par morceaux sur un segment :
• Définition des applications continues par morceaux sur un segment, restrictions aux segments pour un intervalle quelconque.
• vérification de la structure d'espace vectoriel,
• construction de l'intégrale,
la valeur de l'intégrale est indépendante de la subdivision choisie,
l'intégrale des applications continues par morceaux est compatible avec celles des applications en escalier et celle des applications continues,
l'intégrale est linéaire, additive et positive.

8 - Sommes de Riemann : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
lorsque $f$ est une application continue si $u_k$ vérifie pour tous les $n$ :

$$u_k \in \left[a + \frac{(k-1)(b-a)}{n},\, a + \frac{k(b-a)}{n}\right]$$

exemples de limite de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$,
recherche d'un équivalent de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$.

9 - Lien avec les primitives :
• Continuité de l'application $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $f$ est continue par morceaux, exemple de $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t = |x|$,
• dérivé de l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ si $f$ est continue, $F' = f$.