

## COMPLEXES

Dans ce chapitre  $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2$  et  $\lambda$  sont des réels,  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , et les nombres réels  $\theta, \theta_1$  et  $\theta_2$  représentent des angles.

### Présentation des complexes

#### Définitions et opérations

- Un nombre complexe  $z$  est un couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  noté  $z = x + iy$  et parfois  $x + yi$ . Les parties réelles et imaginaires sont  $x = \operatorname{re} z$  et  $y = \operatorname{im} z$ .

Dans la suite  $z = x + iy, z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , etc.

- Les complexes  $z_1$  et  $z_2$  sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaires sont égales.

$$z_1 = a_2 \iff (\operatorname{re} z_1 = \operatorname{re} z_2 \text{ ET } \operatorname{im} z_1 = \operatorname{im} z_2)$$

- L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$ .
- Le conjugué  $\bar{z}$  et le module  $|z|$  de  $z$  sont définis ainsi :

$$\bar{z} = x - iy \quad |z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$$

- La somme et le produit sont des lois de composition interne sur  $\mathbb{C}$  :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

\* Les nombres complexes de partie imaginaire nulle sont identifiés aux nombres réels, un tel nombre est noté  $x$  à la place de  $x + 0i$ . Avec cette convention un calcul possible sur  $\mathbb{R}$  l'est aussi sur  $\mathbb{C}$  et aboutit au même résultat.

Un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé nombre imaginaire pur, il est noté  $iy$  à la place de  $0 + iy$ .

\* Les calculs sur  $\mathbb{C}$  suivent les règles communes du calcul algébrique en exploitant la relation  $i^2 = -1$ , comme l'illustrent ces exemples :

$$\lambda z = \lambda(x + iy) = (\lambda x) + (\lambda y)i \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$iz = i(x + iy) = -y + ix \quad i^{2n} = (-1)^n$$

■ L'ensemble  $\mathbb{C}$  muni de l'addition et de la multiplication est un corps pour les raisons suivantes.

L'addition  $+$  est commutative, associative, a un élément nul  $0 = 0 + 0i$ , *i.e.* neutre pour l'addition, et tout complexe a un opposé, *i.e.* un symétrique pour  $+$  :

$$0 = 0 + 0i \quad -z = -(x + iy) = (-x) + i(-y) \text{ aussi noté } -x - iy$$

La multiplication  $\times$  est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition  $+$ , a un élément unité  $1 = 1 + 0i \neq 0$ , *i.e.* neutre pour la multiplication, et tout complexe non nul a un inverse, *i.e.* un symétrique pour la multiplication :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{pour } z \neq 0 \quad \text{ainsi } \frac{1}{i} = \bar{i} = -i$$

◆ Ces preuves appliquent directement les définitions précédentes.

◇ Par exemple la preuve que  $0 = 0 + 0i$  est l'élément nul de  $\mathbb{C}$  provient de la définition même de l'addition sur  $\mathbb{C}$  :

$$z +_{\mathbb{C}} 0 = (x + iy) + (0 + 0i) = (x +_{\mathbb{R}} 0) + (y +_{\mathbb{R}} 0) = x + iy = z$$

$$0 +_{\mathbb{C}} z = (0 + 0i) + (x + iy) = (x +_{\mathbb{R}} 0) + (y +_{\mathbb{R}} 0) = x + iy = z$$

Le signe  $+_{\mathbb{C}}$  représente à l'addition sur  $\mathbb{C}$  qui est définie à partir de l'addition  $+_{\mathbb{R}}$  des nombres réels, et le signe  $+$  dans  $x + iy$  correspond à la notation des nombres complexes.

Dans la suite ces différentes sommes sont notées à l'aide du signe  $+$ , le contexte précise comment il doit être interprété.

◇ La démonstration de la commutativité de la multiplication repose sur la commutativité de la somme et du produit des nombres réels :

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1) + i(x_2y_1 + y_2x_1) = z_2 \times z_1 \end{aligned}$$

Ces égalités proviennent de la symétrie ds la définition du produit de deux complexes.

◇ La démonstration de l'associativité du produit commence par le calcul du produit  $z_1(z_2z_3)$  :

$$\begin{aligned} z_1(z_2 z_3) &= (x_1 + iy_1)((x_2 x_3 - y_2 y_3) + i(x_2 y_3 + y_2 x_3)) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - \underline{x_1 y_2 y_3} - \underline{y_1 x_2 y_3} - y_1 y_2 x_3) \\ &\quad + i(\underline{x_1 x_2 y_3} + \underline{x_1 y_2 x_3} + y_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3) \end{aligned}$$

L'expression développée de  $(z_1 z_2) z_3$  peut être obtenue de la même façon ou directement à partir du produit ci-dessus à cause de la commutativité de la multiplication. En effet  $(z_1 z_2) z_3 = z_3 (z_1 z_2)$  correspond à la formule précédente par substitution des indices  $(1, 2, 3)$  par  $(3, 1, 2)$  :

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= z_3 (z_1 z_2) = (x_3 x_1 x_2 - x_3 y_1 y_2 - \underline{y_3 x_1 y_2} - \underline{y_3 y_1 x_2}) \\ &\quad + i(\underline{x_3 x_1 y_2} + x_3 y_1 x_2 + \underline{y_3 x_1 x_2} - y_3 y_1 y_2) \end{aligned}$$

Les deux produits  $z_1(z_2 z_3)$  et  $(z_1 z_2) z_3$  sont donc égaux. L'expression développée de ces produits est invariante par permutation des indices  $(1, 2, 3)$ .

◇ Un simple produit vérifie que tout complexe  $z$  non nul est inversible :

$$\begin{aligned} z &= x + iy \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad x^2 + y^2 > 0 \\ z' &= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \\ z z' &= (x + iy) \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{xy - xy}{x^2 + y^2} = 1 \\ z' &= \frac{1}{x^2 + y^2} z = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

Autrement dit  $z'$  est l'inverse, pour le produit, de  $z \neq 0$  et est désormais noté  $1/z$  ou  $z^{-1}$ .

◇ Les autres vérifications s'effectuent de la même façon.

○ La partie réelle  $\operatorname{re} h$  et la partie imaginaire  $\operatorname{im} h$  d'une application  $h$  définie de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{C}$  sont les applications qui ont pour valeur la partie réelle et la partie imaginaire des images de la fonction  $h$  :

$$\begin{aligned} h : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} & \operatorname{re} h : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} & \operatorname{im} h : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) & t &\longmapsto \operatorname{re}(h(t)) & t &\longmapsto \operatorname{im}(h(t)) \\ & & h(t) &= (\operatorname{re} h)(t) + i(\operatorname{im} h)(t) \end{aligned}$$

## Parties réelles et imaginaires

□ Les égalités suivantes sont les propriétés de base des complexes :

$$\begin{aligned} \operatorname{re}(z_1 + z_2) &= \operatorname{re} z_1 + \operatorname{re} z_2 & \operatorname{im}(z_1 + z_2) &= \operatorname{im} z_1 + \operatorname{im} z_2 \\ \operatorname{re}(\lambda z) &= \lambda \operatorname{re} z & \operatorname{im}(\lambda z) &= \lambda \operatorname{im} z & \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ \operatorname{re}(iz) &= -\operatorname{im} z & \operatorname{im}(iz) &= \operatorname{re} z \end{aligned}$$

◇ Les preuves se déduisent immédiatement des définitions précédentes.

\* Autrement dit la partie réelle et la partie imaginaire d'une somme sont la somme des parties réelles et celle des parties imaginaires.

## Conjugué

□ Les conjugués des complexes vérifient ce formulaire :

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z & \bar{z} &= \operatorname{re} z - i \operatorname{im} z & \overline{\bar{z}} &= z \\ \operatorname{re} z &= \frac{z + \bar{z}}{2} \in \mathbb{R} & \operatorname{im} z &= \frac{z - \bar{z}}{2i} \in \mathbb{R} & \overline{i} &= -i \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 & \overline{\lambda z} &= \lambda \bar{z} & \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 & \overline{1/z} &= 1/\bar{z} & \text{si } z \neq 0 & \overline{z^n} &= \bar{z}^n \\ z &= \bar{z} \iff \operatorname{im} z = 0 \iff z \in \mathbb{R} \\ z &= -\bar{z} \iff \operatorname{re} z = 0 \iff z \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

\* Autrement dit le conjugué d'une somme, d'un produit, d'un inverse ou d'une puissance entière est la somme, le produit, l'inverse ou la puissance du conjugué.

◇ Les vérifications de ces propriétés s'effectuent aussi à partir des définitions des opérations, celles des produits et des quotients nécessitent quelques calculs :

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)} \\ &= (x_1 x_2 - (-y_1)(-y_2)) + i(x_1(-y_2) + x_2(-y_1)) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \overline{z_1 z_2} \\ \overline{1/z} &= \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{1}{|\bar{z}|^2} z = \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{car } |z| = |\bar{z}| \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La démonstration sur la puissance opère par récurrence sur  $n$ .

◇ Une preuve par implications circulaires justifie les équivalences :

$$\begin{aligned}
z = \bar{z} &\implies x + iy = x - iy \\
&\implies x = x \text{ ET } y = -y \quad \text{donc } 2y = 0 \text{ puis } y = 0 \\
&\implies \operatorname{im} z = y = 0 \\
&\implies z = x + 0i = x \in \mathbb{R} \\
&\implies z = x - 0i = \bar{z} \\
z = -\bar{z} &\implies x + iy = -(x - iy) = -x + iy \\
&\implies x = -x \text{ ET } y = y \quad \text{donc } x = 0 \\
&\implies \operatorname{re} z = x = 0 \\
&\implies z = 0 + iy = iy \in i\mathbb{R} \\
&\implies z = iy = -(-iy) = -\bar{z}
\end{aligned}$$

## Module et inégalité triangulaire

□ Les principales propriétés du module sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
|z| &= |\bar{z}| \quad |z|^2 = z \bar{z} \in \mathbb{R}_+ \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad |z^n| = |z|^n \\
\left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{|z|} \quad \text{si } z \neq 0 \quad |\lambda z| = \lambda |z| \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{cases} |\operatorname{re} z| \leq |z| \\ |\operatorname{im} z| \leq |z| \end{cases} \\
|z| = 0 &\iff z = 0 \quad |z| = \operatorname{re} z \iff |z| = z \iff z \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

\* L'égalité  $z \bar{z} = |z|^2$  permet d'effectuer des calculs complexes sans devoir préciser la partie réelle et la partie imaginaire de  $z$ .

Pour cette raison tout calcul du module  $|z|$  doit privilégier la relation  $z \bar{z} = |z|^2$  à la définition  $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

◇ L'égalité  $z \bar{z} = |z|^2$  démontre l'égalité du module du produit :

$$\begin{aligned}
z \bar{z} &= (x^2 + y^2) + i(xy - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \\
|z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2) \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\
&= z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2
\end{aligned}$$

Les nombres réels  $|z_1 z_2|$  et  $|z_1| |z_2|$  sont positifs, ainsi  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .

La preuve pour le quotient est similaire :

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \frac{1}{|z|^2} |z| = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$

Les inégalités proviennent des propriétés des radicaux.

\* Le module étend à  $\mathbb{C}$  la valeur absolue réelle.

Le module et la valeur absolue de même notation  $|\bullet|$  coïncident sur  $\mathbb{R}$ .

▷ Résolution de l'équation  $|z| + z = m + i$  où  $m \in \mathbb{R}$ .

⇒ L'étude de la partie réelle et de la partie imaginaire de cette équation aboutit à ces deux conditions :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + x = m \\ y = 1 \end{cases}$$

Ainsi une solution  $z$  est nécessairement de la forme  $z = x + i$ , il reste donc à étudier l'équation associée à la partie réelle :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 1} + x = m &\implies \sqrt{x^2 + 1} = m - x \\
&\implies x^2 + 1 = (m - x)^2 \\
&\implies x^2 + 1 = m^2 - 2mx + x^2 \\
&\implies 2mx = m^2 - 1
\end{aligned}$$

L'équation  $2mx = m^2 - 1$  n'a pas de solution si  $m = 0$ , sinon la seule valeur possible de  $x$  est  $x = (m^2 - 1)/(2m)$ ; dans la suite  $m \neq 0$ .

Par ailleurs une autre condition nécessaire est  $x \leq m$  :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 1} + x = m &\iff 0 \leq \sqrt{x^2 + 1} = m - x \\
x \leq m &\iff \frac{m^2 - 1}{2m} \leq m \\
&\iff \begin{cases} m^2 - 1 \leq 2m^2 & \text{si } m > 0, \text{ qui est vrai car } -1 < 0 \leq m^2 \\ m^2 - 1 \geq 2m^2 & \text{si } m < 0, \text{ qui est impossible car } -1 < 0 \leq m^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

En conclusion l'équation n'a pas de solution si  $m \leq 0$ .

Si  $m > 0$  la seule solution éventuelle est donc  $x = (m^2 - 1)/(2m)$  et  $z = x + i$ . Ce nombre complexe n'est pas nécessairement une solution car le raisonnement précédent comporte des implications et n'opère pas uniquement par équivalences.

La nécessaire vérification s'effectue directement :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{m^2 - 1}{2m} + i \\
|z|^2 &= \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{4m^2} + 1 = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{4m^2} = \frac{(m^2 + 1)^2}{(2m)^2} \\
|z| &= \frac{m^2 + 1}{|2m|} = \frac{m^2 + 1}{2m} \quad \text{car } m > 0 \\
|z| + z &= \frac{m^2 + 1}{2m} + \frac{m^2 - 1}{2m} + i = m + i
\end{aligned}$$

L'équation initiale admet donc cette unique solution lorsque  $m > 0$ , et n'a pas de solution si  $m \leq 0$ .

### Inégalités triangulaires

■ Les *inégalités triangulaires* s'étendent de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \left| |z_1| - |z_2| \right| &\leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ \left| |z_1| - |z_2| \right| &\leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

◇ La preuve de la principale inégalité triangulaire  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  repose sur cette majoration des carrés des deux membres réels positifs :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\quad \text{car } \operatorname{re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| |\overline{z_2}| = |z_1| |z_2| \end{aligned}$$

La condition d'égalité dans la dernière inégalité est équivalente à  $\operatorname{re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1 \overline{z_2}|$ .

◇ Les autres inégalités triangulaires se démontrent à partir de celle-ci par regroupement des termes comme pour les nombres réels, par exemple  $z_1 = (z_1 \pm z_2) \mp z_2$  :

$$\begin{aligned} |z_1| &= |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \\ &\quad \text{donc } |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

pour la même raison par symétrie

$$|z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 - z_2|$$

en conclusion  $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$

en remplaçant  $z_2$  par  $-z_2$  qui vérifie  $|z_2| = |-z_2|$

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2|$$

⊠ Les produits de nombres complexes vérifient ces équivalences :

$$\begin{aligned} z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R} &\iff z_2 = 0 \text{ OU } \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \\ &\iff z_2 = 0 \text{ OU } (\exists \lambda \in \mathbb{R} \ z_1 = \lambda z_2) \\ z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+ &\iff z_2 = 0 \text{ OU } \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+ \\ &\iff z_2 = 0 \text{ OU } (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \ z_1 = \lambda z_2) \end{aligned}$$

◇ Ces propositions sont valables si  $z_2 = 0$ . Lorsque  $z_2 \neq 0$  ces équivalences reposent sur l'inverse de  $z_2$  et sont dues à la stabilité de  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{R}_+$  par produit et quotient par le nombre réel strictement positif  $|z_2| \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$|z_2| \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} \quad z_1 \overline{z_2} = \frac{z_1}{z_2} |z_2|^2$$

■ Ces conditions décrivent le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\iff z_2 = 0 \text{ OU } (z_2 \neq 0 \text{ ET } z_1/z_2 \in \mathbb{R}_+) \\ &\iff z_2 = 0 \text{ OU } (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \ z_1 = \lambda z_2) \end{aligned}$$

◇ La condition nécessaire et suffisante d'égalité est  $\operatorname{re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1 \overline{z_2}|$  d'après la démonstration précédente. Cette condition est équivalente à  $z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$ , c'est-à-dire  $z_2 = 0$  ou  $z_1/z_2 \in \mathbb{R}_+$ .

▷ Résolution de l'équation  $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$ .

⇒ Cette équation se ramène à l'égalité dans une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1| - |z_2| \\ \iff |z_1 + z_2| + |z_2| &= |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1| \\ \iff Z' = 0 \text{ OU } Z/Z' &\in \mathbb{R}_+ \\ &\text{ où } Z = z_1 + z_2 \text{ et } Z' = -z_2 \text{ donc } Z + Z' = z_1 \\ \iff -z_2 = 0 \text{ OU } \frac{z_1 + z_2}{-z_2} &\in [0, +\infty[ \\ \iff z_2 = 0 \text{ OU } 1 + \frac{z_1}{z_2} &\in ]-\infty, 0] \\ \iff z_2 = 0 \text{ OU } \frac{z_1}{z_2} &\in ]-\infty, -1] \end{aligned}$$

## Argument d'un nombre complexe

### L'exponentielle complexe

• L'exponentielle des nombres imaginaires purs est définie ainsi :

$$e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

■ Les propriétés de base de l'exponentielle complexe reposent sur les formules d'addition :

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \quad (e^{i\theta})^p = e^{ip\theta}$$

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad e^{2i\pi} = 1 \quad e^{i\pi} = -1 \quad e^{i\pi/2} = i$$

$$e^{i\theta} = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \quad e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \theta \in \alpha + 2\pi\mathbb{Z}$$

◇ La première équation est directement liée aux formules d'addition :

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{\overline{e^{i\theta}}}{|e^{i\theta}|^2} = e^{-i\theta}$$

L'égalité  $(e^{i\theta})^p = e^{ip\theta}$  se démontre par récurrence sur  $p$  pour  $p \in \mathbb{N}$  et à partir de  $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$  pour  $p < 0$ .

L'égalité  $e^{i\theta} = e^{i\alpha}$  de complexes est équivalente aux deux égalités réelles  $\cos \theta = \cos \alpha$  et  $\sin \theta = \sin \alpha$  dont les solutions sont  $\theta \in \alpha + 2\pi\mathbb{Z}$ .

■ Les formules d'Euler permettent réciproquement d'exprimer les fonctions trigonométriques à partir de l'exponentielle complexe :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

\* Ces factorisations interviennent régulièrement :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2e^{i\theta/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\alpha}(1 + e^{i(\beta-\alpha)}) = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = 2ie^{i\theta/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\alpha}(1 - e^{i(\beta-\alpha)}) = 2ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

\* L'usage de la même notation  $\exp$  pour les nombres réels et pour les nombres imaginaires purs est justifiée par l'analyse. Ces deux fonctions correspondent en fait à une même application  $\exp$  définie sur  $\mathbb{C}$ .

\* En particulier l'exponentielle des nombres imaginaires purs et l'exponentielle réelle vérifient la même équation fonctionnelle développant l'exponentielle d'une somme, et, l'exponentielle des nombres imaginaires purs peut être dérivée de ces deux manières, par dérivation de la partie réelle et de la partie imaginaire, et par le même formulaire que l'exponentielle réelle :

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2} \quad e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

$$(e^{it})' = (\cos t + i \sin t)' = -\sin t + i \cos t$$

$$= i(\cos t + i \sin t) = ie^{it}$$

\* Au contraire l'exponentielle réelle est un nombre réel strictement positif alors que l'exponentielle complexe est quelconque :

$$e^{i\pi} = -1 < 0 \quad e^{i\pi/2} = i \notin \mathbb{R}$$

• L'exponentielle s'étend ainsi aux nombres complexes :

$$\exp : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \quad \exp z = e^z = e^{\operatorname{re} z} e^{i \operatorname{im} z} = e^{\operatorname{re} z} (\cos(\operatorname{im} z) + i \sin(\operatorname{im} z))$$

\* Le complexe  $e^z$  se caractérise ainsi :

$$|e^z| = e^{\operatorname{re} z} \quad \operatorname{re}(e^z) = e^{\operatorname{re} z} \cos(\operatorname{im} z) \quad \operatorname{im}(e^z) = e^{\operatorname{re} z} \sin(\operatorname{im} z)$$

■ L'exponentielle complexe vérifie sur  $\mathbb{C}$  la même équation fonctionnelle et les mêmes règles de dérivation :

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto e^{zt} \quad f'(t) = ze^{zt}$$

### Argument d'un complexe de module un

■ L'ensemble des complexes de module un est noté  $\mathbb{U}$  et est stable par produit et inverse, d'où ces propriétés lorsque  $(z, z_1, z_2) \in \mathbb{U}^3$  :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \quad 1 \in \mathbb{U} \quad z_1 z_2 \in \mathbb{U} \quad \frac{1}{z} = \bar{z} \in \mathbb{U} \quad z^p \in \mathbb{U}$$

■ Pour tout  $z \in \mathbb{U}$  il existe un unique angle  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  vérifiant  $z = e^{i\theta}$ ; dans ce cas  $\theta$  est appelé l'argument principal de  $z$  et noté  $\arg z$  :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} / \theta \in ]-\pi, \pi]\}$$

$$\forall z \in \mathbb{U} \quad \exists ! \theta \in ]-\pi, \pi] \quad z = e^{i\theta} \quad \theta \text{ est noté } \arg z$$

Plus généralement tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $z = e^{i\alpha}$  est un argument de  $z$ .

L'ensemble des valeurs possibles de  $\alpha$  est  $\arg z + 2\pi\mathbb{Z}$ .

◇ Tout nombre complexe  $z$  de module 1 est associé à un point du plan de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant  $x^2 + y^2 = 1$ , ce point correspond à un angle  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  vérifiant  $x = \cos \theta$  et  $y = \sin \theta$ , c'est-à-dire  $z = x + iy = e^{i\theta}$ .

Les égalités des ensembles se déduisent par inclusions successives :

$$\begin{aligned} \{e^{i\theta} / \theta \in ]-\pi, \pi]\} &\subset \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} && \text{par construction} \\ \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} &\subset \mathbb{U} && \text{car } |e^{i\theta}| = 1 \\ \mathbb{U} &\subset \{e^{i\theta} / \theta \in ]-\pi, \pi]\} && \text{par la propriété de relèvement} \end{aligned}$$

□ Ces propriétés des complexes  $z, z_1$  et  $z_2$  de module un découlent des propriétés de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 &\iff \arg z_1 = \arg z_2 && \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{\pm 2\pi} \\ \arg(1/z) &= \arg \bar{z} = -\arg z \pmod{+ 2\pi} && \arg(-z) = \arg z \pm \pi \\ \arg 1 &= 0 && \arg i = \pi/2 && \arg(-1) = \pi \\ \arg(e^{i\theta}) &\in \theta + 2\pi\mathbb{Z} && z = e^{i \arg z} \end{aligned}$$

◇ Tout nombre complexe de module un  $z \in \mathbb{U}$  s'écrit donc de façon unique sous la forme  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta = \arg z \in ]-\pi, \pi]$ , de façon similaire  $z_1 = e^{i\theta_1} \in \mathbb{U}$  et  $z_2 = e^{i\theta_2} \in \mathbb{U}$ . De même  $z_1 z_2$  est de module un et de la forme  $e^{i\theta}$  où  $\theta = \arg(z_1 z_2)$  :

$$e^{i\theta} = z_1 z_2 = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \theta = \arg(z_1 z_2) \in \theta_1 + \theta_2 + 2\pi\mathbb{Z}$$

Par ailleurs  $\arg z_1 + \arg z_2 \in ]-2\pi, 2\pi]$  et donc  $\arg z_1 + \arg z_2 - \arg(z_1 z_2)$  a pour valeur 0 ou  $\pm 2\pi$ .

### Définition générale de l'argument et notation polaire

- Toute expression de la forme  $z = r e^{i\theta}$  où  $r$  et  $\theta$  sont des nombres réels est appelée notation polaire de  $z$ , en général  $r \geq 0$ .
- L'argument d'un nombre complexe  $z \neq 0$  est celui de  $z/|z| \in \mathbb{U}$  défini ci-dessus ; tout complexe non nul admet donc une représentation polaire :

$$\arg z = \arg \frac{z}{|z|} \quad z = |z| e^{i \arg z} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^*$$

L'argument de  $0 \in \mathbb{C}$  n'est pas défini.

■ Ces propriétés supposent que  $z, z_1$  et  $z_2$  ne sont pas nuls :

$$\begin{aligned} \arg z_1 = \arg z_2 &\iff \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+^* && \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{\pm 2\pi} \\ &&& \arg(1/z) = \arg(\bar{z}) = -\arg z \pmod{+ 2\pi} \\ \arg(-z) &= \arg z \pm \pi && \arg z = \arg(\lambda z) \quad \text{dès que } \lambda \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

◇ La démonstration de ce théorème pour les complexes  $z \in \mathbb{C}^*$  repose sur les résultats des complexes de module 1 appliqué à  $z/|z|$ .

■ Lorsque  $r_1, r_2, \theta_1$  et  $\theta_2$  sont des réels, cette condition nécessaire et suffisante teste l'égalité des nombres complexes en notation polaire :

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff \begin{cases} (r_2 = r_1 \quad \text{ET } \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}) \\ \text{OU } (r_2 = -r_1 \quad \text{ET } \theta_2 - \theta_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}) \\ \text{OU } r_2 = r_1 = 0 \end{cases}$$

◇ La preuve commence par la condition nécessaire  $|r_1 e^{i\theta_1}| = |r_2 e^{i\theta_2}|$ , donc  $r_2 = \pm r_1 \in \mathbb{R}$ , puis étudie le quotient  $z_2/z_1$  où  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  et  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  :

Cas  $r_1 = r_2 = 0$  :  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont quelconques

$$\text{Cas } r_2 = r_1 \neq 0 : \frac{z_2}{z_1} = \frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = 1 \iff \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\text{Cas } r_2 = -r_1 \neq 0 : \frac{z_2}{z_1} = -\frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}} = -e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = 1$$

$$\iff \theta_2 - \theta_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$$

Réciproquement  $z_1 = z_2$  dans ces trois cas.

### Développement des fonctions trigonométriques

★ L'égalité ci-dessous est connue sous le nom de formule de Moivre :

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

■ La formule de Moivre associée à la formule du binôme permet d'écrire  $\cos(n\theta)$  et  $\sin(n\theta)$  sous forme d'un polynôme en  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{re}(e^{in\theta}) = \operatorname{re}((e^{i\theta})^n) \\ &= \operatorname{re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n) = \operatorname{re}\left(\sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k} \sin^k \theta \cos^{n-k} \theta\right) \end{aligned}$$

$$\sin(n\theta) = \text{im}((\cos \theta + i \sin \theta)^n) = \text{im}\left(\sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k} \sin^k \theta \cos^{n-k} \theta\right)$$

\* Du fait que  $(-i)^{2k} = (-1)^k$  et  $(-i)^{2k+1} = (-1)^k i$ , les termes d'indice  $k$  impair n'interviennent pas dans la formule de  $\cos(n\theta)$  obtenue à partir d'une partie réelle, ni ceux pour lesquels  $k$  est pair dans  $\sin(n\theta)$ .

\* Ces développements se terminent le plus souvent en remplaçant  $\sin^2 \theta$  par  $1 - \cos^2 \theta$  et plus généralement  $\sin^{2k} \theta$  par  $(1 - \cos^2 \theta)^k$ .

La transformation symétrique de  $\cos^2 \theta$  en  $1 - \sin^2 \theta$  est aussi possible.

▷ Développement de  $\cos(5\theta)$ .

⇒ Ce développement est l'application direct de la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) &= \text{re}(e^{5i\theta}) = \text{re}((\cos \theta + i \sin \theta)^5) \\ &= \text{re}(\cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \sin^3 \theta \\ &\quad + 5 \cos \theta \sin^4 \theta + i \sin^5 \theta) \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta \end{aligned}$$

\* Les développements de  $\cos(4\theta)$  et  $\sin(4\theta)$  se font aussi rapidement en appliquant deux fois la formule de l'angle double que par cette méthode.

▷ Détermination du signe de  $\cos \theta + \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$  sur  $]-\pi, \pi]$ .

⇒ L'étude de cette expression commence par son développement sous la forme d'un polynôme  $P$  en  $y = \cos \theta$  :

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \text{re}(e^{3i\theta}) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ &= \cos^3 \theta + 3 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \cos \theta + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) &= P(\cos \theta) \\ &= \cos \theta + 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta \\ &= 16 \cos^5 \theta - 16 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta = \cos \theta (16 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 3) \\ &= y(16y^4 - 16y^2 + 3) = P(y) \end{aligned}$$

La détermination du signe de  $P(y)$  se ramène à la recherche des racines d'un polynôme du second degré en  $z = y^2$  :

$$16z^2 - 16z + 3 \quad \Delta = 16^2 - 4 \times 3 \times 16 = 64$$

de racines  $z = \frac{16 - 8}{32} = \frac{1}{4}$  et  $z = \frac{16 + 8}{32} = \frac{3}{4}$

La factorisation en  $\cos \theta$  de l'expression initiale est donc celle-ci :

$$\begin{aligned} \cos \theta + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) &= \cos \theta (16 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta + 3) \\ &= \cos \theta \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{4}\right) \left(\cos^2 \theta - \frac{3}{4}\right) \\ &= \cos \theta \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right) \left(\cos \theta + \frac{1}{2}\right) \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Ce tableau décrit le signe du produit pour  $y \in [-1, 1]$  et  $\theta \in [0, \pi]$  :

$y = \cos \theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1		
$\theta$	$\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0		
$P(\cos \theta)$	-3	-	0	+	0	-	0	+	3

L'égalité  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  complète l'étude du signe de  $P(\cos \theta)$  :

$\theta$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0		
$P(\cos \theta)$	-3	-	0	+	0	-	0	+	3
$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$		
$P(\cos \theta)$	3	+	0	-	0	+	0	-	-3

### Linéarisation des polynômes trigonométriques

■ L'écriture de  $\cos^n \theta$  et  $\sin^n \theta$  sous la forme d'une combinaison linéaire de  $\cos(k\theta)$  et de  $\sin(k\theta)$  avec  $k \in \{0 \dots n\}$  repose sur les formules d'Euler associées à la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \cos^n \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^{n-k} (e^{-i\theta})^k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^n \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (e^{i\theta})^{n-k} (e^{-i\theta})^k \\ &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta}\end{aligned}$$

\* La dernière étape du calcul consiste à regrouper les termes sous la forme  $e^{ik\theta} \pm e^{-ik\theta}$  pour les simplifier en  $2 \cos(k\theta)$  ou  $2i \sin(k\theta)$ .

\* Le résultat de la linéarisation de  $\cos^n \theta$  ou de  $\sin^n \theta$  est un nombre réel pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  même si les calculs intermédiaires opèrent dans  $\mathbb{C}$ .

▷ Linéarisation de  $\sin^3 \theta$ .

⇒ La linéarisation repose sur les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{-8i} \\ &= \frac{(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3}{-8i} \\ &= \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{-8i} \\ &= \frac{2i \sin(3\theta) - 6i \sin \theta}{-8i} = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin(3\theta)\end{aligned}$$

▷ Linéarisation du produit  $\sin a \sin b \cos c$ .

⇒ La méthode est similaire à celle de linéarisation des puissances :

$$\begin{aligned}\sin a \sin b \cos c &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} \frac{e^{ic} + e^{-ic}}{2} \\ &= \frac{(e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{i(b-a)} + e^{-i(a+b)})(e^{ic} + e^{-ic})}{-8} \\ &= -\frac{1}{8} \left( e^{i(a+b+c)} - e^{i(a-b+c)} - e^{i(b-a+c)} + e^{-i(a+b-c)} \right. \\ &\quad \left. + e^{i(a+b-c)} - e^{i(a-b-c)} - e^{i(b-a-c)} + e^{-i(a+b+c)} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{8} \left( e^{i(a+b+c)} + e^{-i(a+b+c)} + e^{i(a+b-c)} + e^{-i(a+b-c)} \right. \\ &\quad \left. - e^{i(a-b+c)} - e^{-i(a-b+c)} - e^{i(b-a+c)} - e^{-i(b-a+c)} \right) \\ &= \frac{\cos(a-b+c)}{4} + \frac{\cos(a-b-c)}{4} - \frac{\cos(a+b+c)}{4} - \frac{\cos(a+b-c)}{4}\end{aligned}$$

## Un exemple de série trigonométrique

\* Les méthodes de factorisation et les identités remarquables réelles s'étendent aux nombres complexes car les règles de calcul sont les mêmes.

▷ Ces séries trigonométriques se calculent par une série géométrique :

$$\begin{aligned}C_n &= \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \in \mathbb{R} & S_n &= \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) \in \mathbb{R} \\ E_n &= C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} & C_n &= \operatorname{re} E_n & S_n &= \operatorname{im} E_n\end{aligned}$$

⇒ Ces égalités illustrent les méthodes du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}E_n &= \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \quad \text{pour } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta/2} (e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2})}{e^{i\theta/2} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} = e^{in\theta/2} \frac{2i \sin \left( \frac{(n+1)\theta}{2} \right)}{2i \sin(\theta/2)} \\ C_n &= \operatorname{re} E_n = \frac{\sin \left( \frac{(n+1)\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{n\theta}{2} \right)}{\sin(\theta/2)} \\ S_n &= \operatorname{im} E_n = \frac{\sin \left( \frac{(n+1)\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{n\theta}{2} \right)}{\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

## Racines des nombres complexes

• Pour tout entier  $n \geq 2$ , une racine  $n$ -ème complexe  $u \in \mathbb{C}$  de  $z \in \mathbb{C}$  est caractérisée par  $u^n = z$ .



## Racines de l'unité

■ L'ensemble des racines  $n$ -ème de 1 est noté  $\mathbb{U}_n$ , il contient  $n$  éléments, et est stable par produit, par inverse et par puissance entière :

$$\omega_p = e^{2ip\pi/n} = \omega_1^p \quad \mathbb{U}_n = \{\omega_k / k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_k / 0 \leq k < n\} \subset \mathbb{U}$$

$$\omega_n = \omega_0 = 1 \quad \omega_p \omega_q = \omega_{p+q} \quad \frac{1}{\omega_p} = \overline{\omega_p} = \omega_{-p} \quad \omega_p^q = \omega_{pq}$$

◇ Si  $u \in \mathbb{C}$  est une racine  $n$ -ème de l'unité alors  $|u|^n = 1$  et  $|u| = 1$ . Ainsi  $u \in \mathbb{U}$  et  $u$  est de la forme  $e^{i\theta}$ .

L'égalité  $\mathbb{U}_n = \{\omega_k / k \in \mathbb{Z}\}$ , provient de l'équivalence ci-dessous :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = 1 \iff n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

L'inclusion  $\{\omega_k / 0 \leq k < n\} \subset \{\omega_k / k \in \mathbb{Z}\}$  est immédiate. Réciproquement soit  $p \in \mathbb{Z}$ , notons  $r$  et  $q$  le quotient et le reste de  $p$  par  $n$  :

$$p = nq + r \quad 0 \leq r < n$$

$$\omega_p = e^{2ip\pi/n} = e^{2i(qn+r)\pi/n} = e^{2iq\pi + 2ir\pi/n} = e^{2iq\pi} e^{2ir\pi/n}$$

$$= 1 \times e^{2ir\pi/n} = e^{2ir\pi/n} \in \{\omega_k / 0 \leq k < n\}$$

$$\{\omega_k / k \in \mathbb{Z}\} \subset \{\omega_k / 0 \leq k < n\}$$

Les propriétés de stabilité proviennent des règles de calcul sur les exponentielles complexes.

★ Les trois racines troisièmes de 1 sont 1,  $j = e^{2i\pi/3}$  et  $j^2 = \bar{j}$ .

Le réel  $-1$  est une racine  $n$ -ème de l'unité si et seulement si  $n$  est pair.

■ La somme des  $n$  racines  $n$ -ème de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = 0 \quad 1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 0$$

◇ Cette somme correspond à une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} = \frac{1 - 1}{1 - \omega_1} = 0$$

Ce dénominateur est différent de 0 dès que  $n > 1$ .

La somme  $1 + j + j^2$  correspond au cas  $n = 3$ .

## Expression polaire d'une racine non nulle

■ La notation polaire  $z = re^{i\theta} \neq 0$  avec  $r = |z| > 0$  et  $\theta = \arg z \in \mathbb{R}$  facilite la construction de l'ensemble des racines  $n$ -ème de  $z$  qui contient  $n$  complexes différents définis ainsi :

$$\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n} \omega_k / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} / 0 \leq k < n-1 \right\} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n} \mathbb{U}_n$$

En particulier les deux racines carrées d'un complexe sont opposées.

◇ Le complexe  $u$  est racine  $n$ -ème de  $z = re^{i\theta}$  à cette condition nécessaire et suffisante :

$$u^n = z = re^{i\theta} = (\sqrt[n]{r} e^{i\theta/n})^n \iff \left( \frac{u}{\sqrt[n]{r} e^{i\theta/n}} \right)^n = 1$$

$$\iff \frac{u}{\sqrt[n]{r} e^{i\theta/n}} \in \mathbb{U}_n$$

Cette équivalence construit l'ensemble des racines  $n$ -ème de  $z \in \mathbb{C}^*$ .

\* La notation  $\sqrt[n]{\bullet}$  est réservée à l'unique racine  $n$ -ème positive d'un réel positif, elle est étendue à  $\mathbb{R}$  lorsque  $n$  est impair.

Aucune notation similaire n'est définie pour les nombres complexes.

▷ Détermination des racines carrées de  $j + 1$ ,  $j^2 + 1$  et  $j - 1$ .

⇒ Les deux premières racines s'obtiennent directement :

$$1 + j + j^2 = 0$$

$$j + 1 = -j^2 = e^{-i\pi} e^{4i\pi/3} = e^{i\pi/3} \quad \text{de racine } \pm e^{i\pi/6}$$

$$j^2 + 1 = \overline{1 + j} = e^{i\pi/3} = e^{-i\pi/3} \quad \text{de racine } \pm e^{-i\pi/6}$$

$$j - 1 = e^{2i\pi/3} - 1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} e^{5\pi/6}$$

$$\text{de racine } \pm \sqrt[4]{3} e^{5i\pi/12}$$

## Méthode algébrique de calcul d'une racine carrée

■ Les deux racines carrées  $z = \pm(x + iy)$  d'un nombre complexe  $a + ib$  peuvent être obtenues algébriquement à partir de ces égalités :

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{re} z^2 = x^2 - y^2 = a$$

$$\operatorname{im} z^2 = 2xy = b$$

La demi-somme et la demi-différence des deux premières équations déterminent  $x^2$  et  $y^2$ , et donc par radicaux  $|x|$  et  $|y|$ .

La troisième équation énonce si les réels  $x$  et  $y$  sont de même signe ou non selon que  $b$  est positif ou négatif; ceci termine le calcul des deux racines carrées opposées  $\pm(x + iy)$  de  $a + ib$ .

▷ Déterminer les deux racines carrées de  $-5 - 12i$ .

⇒ La méthode précédente s'applique directement :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \quad x^2 - y^2 = -5$$

$$x^2 = 4 \quad y^2 = 9 \quad 2xy = -12$$

Les racines recherchées sont donc  $(x + iy) = \pm(2 - 3i)$ .

▷ Déterminer les racines carrées et les racines quatrièmes de  $24i - 7$ .

⇒ La méthode est la même pour la racine carrée :

$$(x + iy)^2 = -7 + 24i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = 24 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} \\ = \sqrt{625} = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 25 - 7 = 18 \\ 2y^2 = 25 + 7 = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

Les réels  $x$  et  $y$  sont de même signe car  $2xy = 24 > 0$ .

Les deux racines carrées complexes opposées sont  $\pm(3 + 4i)$ .

⇒ Les racines quatrièmes sont les racines carrées des racines carrées :

$$z^4 = (z^2)^2 = -7 + 24i \iff z^2 = \pm(3 + 4i)$$

$$\iff z^2 = 3 + 4i \text{ OU } z^2 = -3 - 4i$$

La résolution de  $(x + iy)^2 = 3 + 4i$  est similaire :

$$(x + iy)^2 = 3 + 4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 5 + 3 = 8 \\ 2y^2 = 5 - 3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Les réels  $x$  et  $y$  sont de même signe, et les deux racines carrées de  $3 + 4i$  sont  $\pm(2 + i)$ .

La racine carrée de  $-3 - 4i$  se déduit de la précédente par produit par  $i$  :

$$z^2 = -3 - 4i \iff -z^2 = (iz)^2 = 3 + 4i$$

$$\iff iz = \pm(2 + i)$$

$$\iff z = \pm(1 - 2i)$$

Les racines quatrièmes de  $24i - 7$  sont donc ces quatre racines carrées :

$$z^4 = 24i - 7 \iff z \in \{2 + i, -2 - i, 1 - 2i, -1 + 2i\}$$

## Équation du second degré

■ La transformation suivante est à la base de la factorisation et de la recherche des deux racines d'un polynôme du second degré :

$$az^2 + bz + c = a \left( \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \quad \text{lorsque } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } (b, c) \in \mathbb{C}^2$$

$$= a \left( z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \left( z - \frac{-b - \delta}{2a} \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C} \text{ et } \pm\delta \text{ sont les deux racines carrées de } \Delta.$$

\* Les racines  $r$  du polynôme  $z^2 - 2 \cos \theta z + 1$  sont  $r = e^{\pm i\theta}$  :

$$\Delta = 4 \cos^2 \theta - 4 = -4 \sin^2 \theta = (2i \sin \theta)^2$$

$$r = \frac{2 \cos \theta \pm 2i \sin \theta}{2} = e^{\pm i\theta}$$

Les racines  $s$  du polynôme  $z^4 - 2 \cos \theta z^2 + 1$  sont  $s = \pm e^{\pm i\theta/2}$  car  $s^2 = r$ .

▷ Détermination des racines de  $z^2 + (i - 2)z + 2 + 2i = 0$ .

⇒ Cet exemple illustre la méthode précédente :

$$\begin{aligned}\Delta &= (i - 2)^2 - 4(2 + 2i) \\ &= -1 - 4i + 4 - 8 - 8i = -5 - 12i = (2 - 3i)^2 \\ &\text{de racine } \frac{2 - i \pm (2 - 3i)}{2}\end{aligned}$$

Les deux racines carrées complexes de  $\Delta$  ont été calculées dans l'exemple précédent. Les racines du polynôme complexes sont donc  $i$  et  $2 - 2i$ .

★ Tout polynôme du second degré  $aX^2 + bX + c$  à coefficients complexes se factorise dans  $\mathbb{C}$  sous la forme  $a(X - r_1)(X - r_2)$ , et les sommes et les produits des racines  $r_1$  et  $r_2$  sont reliés aux coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  par cette équivalence :

$$r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont les racines de } aX^2 + bX + c \iff \begin{cases} r_1 + r_2 = -b/a \\ r_1 r_2 = c/a \end{cases}$$

\* Lorsque  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$  la signe de la fonction polynomiale  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  définie sur  $\mathbb{R}$  et le nombre des solutions réelles de l'équation  $f(r) = 0$  dépendent des signes de  $\Delta = b^2 - 4ac$  et de  $a$  :

$$a > 0 \text{ ET } \Delta \leq 0 \implies (\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0)$$

$$a < 0 \text{ ET } \Delta \leq 0 \implies (\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 0)$$

$$\Delta > 0 \implies \begin{cases} \text{l'application } f \text{ change de signe } i.e. \\ \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) < 0 \\ f(r) = 0 \text{ a deux solutions réelles } r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \implies f(r) = 0 \text{ a une solution réelle } r = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \implies f(r) = 0 \text{ n'a pas de solution réelle}$$

### Exemple récapitulatif

▷ Résolution d'une équation par les méthodes polaires et cartésiennes :

$$(z^2 - 1)^3 = -8z^3 \quad Z = \frac{z^2 - 1}{z} \quad Z^3 = -8 \quad z \neq 0$$

⇒ La première étape résout l'équation  $Z^3 = -8$  en coordonnées polaires ; les trois solutions sont  $Z = -2$ ,  $Z = -2j$  et  $Z = -2\bar{j} = -2j^2$ . La seconde résout trois équations du second degré :

$$\begin{aligned}Z = -2 \quad z^2 - 1 = -2z \quad z^2 + 2z - 1 = 0 \\ \Delta = 4 + 4 = 8 \quad z = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \\ Z = -2j \quad z^2 - 1 = -2jz \quad z^2 + 2jz - 1 = 0 \\ \Delta = 4j^2 + 4 = 4(1 + j^2) = (2e^{-i\pi/6})^2 \\ z = \frac{-2j \pm 2e^{-i\pi/6}}{2} = -e^{2i\pi/3} \pm e^{-i\pi/6} \\ = \frac{1 - i\sqrt{3} \pm (\sqrt{3} - i)}{2} \\ z = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i) \text{ OU } z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 + i) \\ Z = -2j^2 \quad z^2 - 1 = -2j^2z \quad z^2 + 2j^2z - 1 = 0 \\ \Delta = 4j^4 + 4 = 4(1 + j) = (2e^{i\pi/6})^2 \\ z = \frac{-2j^2 \pm 2e^{i\pi/6}}{2} = -e^{-2i\pi/3} \pm e^{i\pi/6} \\ = \frac{1 + i\sqrt{3} \pm (\sqrt{3} + i)}{2} \\ z = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i) \text{ OU } z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 - i)\end{aligned}$$

\* Ce polynôme de degré six possède six racines ; les quatre racines complexes sont conjuguées car les coefficients du polynôme sont réels.

\* Les racines du polynôme intermédiaire obtenu pour  $Z = -2\bar{j}$  se déduisent de celles obtenues pour  $Z = -2j$  car les coefficients de ces polynômes sont conjugués deux à deux. Il en est de même de leurs racines.