

FONCTIONS USUELLES

Les variables a, b, c, x, y, θ , etc. de ce chapitre sont réelles, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Logarithme, exponentielle et puissance

Fonction logarithme

■ Il existe une unique application dérivable $\ln$ appelée logarithme définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par ces deux conditions :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \ln 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln' x = 1/x$$

◇ La théorie de l'intégration prouve que l'application $\ln : x \mapsto \int_1^x 1/t \, dt$ vérifie ces deux propositions. D'autres constructions sont possibles.

◇ Si les applications f et g vérifient ces propositions, alors la fonction auxiliaire $f - g$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc est constante et de valeur 0 en 1. Ceci justifie l'unicité de l'application $\ln$:

$$(f - g)(x)' = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \quad f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$$

■ L'application $\ln$ vérifie ces propriétés pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$:

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln x + \ln y & \ln(1/x) &= -\ln x & \ln(x^p) &= p \ln x \\ \ln x > 0 &\iff x > 1 & \ln x < 0 &\iff 0 < x < 1 \end{aligned}$$

◇ La preuve de la première de ces propriétés provient de l'étude de la fonction auxiliaire $f : x \mapsto \ln(xy) - \ln x$ qui est de dérivée nulle et donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$; l'application $x \mapsto \ln(xy)$ est la composée d'un produit par la constante y et de l'application logarithme :

$$f'(x) = (\ln(xy))' - (\ln x)' = y \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = 0$$

$$f(1) = \ln y - \ln 1 = \ln y$$

$$f(x) = \ln(xy) - \ln x = f(1) = \ln y \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

◇ Cette égalité appliquée à $y = 1/x$ justifie l'identité $\ln(1/x) = -\ln x$. Une récurrence démontre la propriété sur les puissances pour $p \in \mathbb{N}$, et l'étude de l'inverse étend cette égalité à $p \in \mathbb{Z}$.

Le signe de la dérivée $\ln' x = 1/x > 0$ indique les variations de $\ln$.

⊠ Si la fonction f est croissante et définie sur un voisinage de $+\infty$, et s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors l'application f admet une limite infinie en $+\infty$.

◇ La première ligne correspond donc aux hypothèses, et la seconde est la propriété à prouver :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad f(x_n) \geq C$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq A \quad f(x) \geq B$$

Soit $B \in \mathbb{R}$, l'hypothèse sur la suite appliquée à $C = B$ justifie l'existence de $N \in \mathbb{N}$, vérifions par la croissance de l'application f que $A = x_N$ convient :

$$x \geq A = x_N \quad f(x) \geq f(A) = f(x_N) \geq C = B$$

■ Les limites de la fonction $\ln$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x &= 0 \end{aligned}$$

◇ Le tableau de variation prouve que $\ln 2 > 0$, donc la limite de la suite $\ln(2^n) = n \ln 2$ est infinie ; par ailleurs l'application $\ln$ est croissante. En conclusion le lemme justifie la limite infinie de l'application $\ln$ en $+\infty$.

◇ La limite à droite en zéro de l'application $\ln$ se déduit de la précédente par composition des limites :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty \\ \implies \lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow 0}} \ln x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1/x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = -\infty \end{aligned}$$

◇ Le calcul de la limite de $(\ln x)/x$ peut être obtenue à partir de celle de e^x/x démontrée dans le paragraphe suivant.

* L'application $\ln$ est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Application exponentielle

■ Il existe une unique application dérivable $\exp$ appelée exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ qui est caractérisée par ces deux conditions :

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \exp 0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp' x = \exp x$$

■ L'application $\exp$ est l'application réciproque de la fonction $\ln$; elle est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

◇ L'application $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et l'application réciproque $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ vérifie bien cette équation différentielle obtenue par dérivation de l'application réciproque :

$$\exp' x = \frac{1}{\ln'(\exp x)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x$$

$$\exp 0 = \exp(\ln 1) = 1$$

◇ L'unicité d'une telle application, notée f est due au fait que la fonction auxiliaire $x \mapsto f(x)/\exp x$ est de dérivée nulle, constante et de valeur 1 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{\exp x} \right)' &= \frac{f'(x) \exp x - f(x) \exp' x}{(\exp x)^2} = \frac{f'(x) \exp x - f(x) \exp x}{(\exp x)^2} \\ &= \frac{(f'(x) - f(x)) \exp x}{(\exp x)^2} = 0 \quad \frac{f(0)}{\exp 0} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

■ L'application $\exp$ vérifie ces propriétés :

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \exp x \exp y & \exp(-x) &= \frac{1}{\exp x} \\ \exp x &> 0 & \exp(px) &= (\exp x)^p \\ \exp x > 1 &\iff x > 0 & 0 < \exp x < 1 &\iff x < 0 \end{aligned}$$

◇ La première égalité, appelée équation fonctionnelle vérifiée par l'application $\exp$, peut être démontrée à partir des variations de la fonction auxiliaire $x \mapsto \exp(x+y)/\exp x$ constante de valeur $\exp y$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\exp(x+y)}{\exp x} \right)' &= \frac{\exp'(x+y) \exp x - \exp(x+y) \exp' x}{(\exp x)^2} = 0 \\ \frac{\exp(0+y)}{\exp 0} &= \exp y \quad \text{pour } x = 0 \end{aligned}$$

◇ L'équation fonctionnelle de l'exponentielle appliquée à $y = -x$ justi-

fie l'égalité $\exp(-x) = 1/\exp x$. La relation sur les puissances se déduit par récurrence sur la même équation fonctionnelle.

Les variations de l'application $\exp$ proviennent de celles de l'application réciproque $\ln$.

■ Les limites essentielles de l'application $\exp$ sont celles-ci :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp x = 0$$

◇ Le tableau de variation de l'application $\exp$ justifie que $\exp 1 > 1$. D'une part l'application $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et d'autre part la suite $(\exp n)_{n \in \mathbb{N}} = (\exp 1)^n$ diverge vers $+\infty$. Le lemme précédent énonce donc la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$.

L'égalité $\exp(-x) = 1/\exp x$ entraîne alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ par composition des limites.

◇ La suite $(q^n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a été étudiée dans le chapitre sur les limites et diverge vers $+\infty$ dès que $q > 1$, par exemple si $q = \exp 1 > 1$. Par ailleurs l'application $\exp x/x$ est croissante sur $[1, +\infty[$ car la dérivée est positive si $x \geq 1$. Le lemme précédent justifie donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\exp x)/x = +\infty$:

$$\left(\frac{\exp x}{x} \right)' = \frac{\exp x (x-1)}{x^2} \geq 0 \quad \text{si } x \geq 1$$

La dernière limite est obtenue par composition :

$$x \exp x = \frac{x}{\exp(-x)} = -\frac{1}{\frac{\exp(-x)}{-x}} \quad \text{de limite } 1/\infty = 0 \text{ en } -\infty$$

◇ Le calcul de la limite de $\ln x/x$ quand x tend vers $+\infty$ se déduit de la limite précédente par composition :

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\exp u}{u} &= +\infty \text{ ET } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\ln x)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \\ \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 \end{aligned}$$

La limite à droite en 0 de $x \ln x$ se déduit de la précédente car dans ce

cas $1/x$ tend vers $+\infty$:

$$x \ln x = -\frac{\ln(1/x)}{1/x} \quad \text{de limite 0 à droite en 0}$$

★ Les applications $\ln : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ sont donc bijectives et réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp(\ln x) = x$$

○ La constante de Néper e est définie par $\exp 1 = e$, c'est-à-dire $\ln e = 1$.

* Il est aussi possible de définir l'application $\exp$ à partir de ces limites :

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x/n)^n \quad \exp x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Fonction puissance

• Dès que $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'expression $x^a = \exp(a \ln x)$ généralise la définition des puissances à partir des produits pour $a \in \mathbb{Z}$ et celle des racines pour $1/a \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$ et $e^a = \exp(a \ln e) = \exp a$.

■ La puissance vérifie ces propriétés pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$:

$$\begin{aligned} x^a y^a &= (xy)^a & x^a x^b &= x^{a+b} & (x^a)^b &= x^{ab} \\ x^1 &= x & x^0 &= 1 & 1^a &= 1 & \frac{1}{x^a} &= x^{-a} \end{aligned}$$

◇ Ces égalités proviennent directement des propriétés des exponentielles :

$$\begin{aligned} x^a y^a &= \exp(a \ln x) \exp(a \ln y) = \exp(a \ln x + a \ln y) \\ &= \exp(a(\ln x + \ln y)) = \exp(a \ln(xy)) = (xy)^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^a x^b &= \exp(a \ln x) \exp(b \ln x) = \exp(a \ln x + b \ln x) \\ &= \exp((a+b) \ln x) = x^{a+b} \end{aligned}$$

$$x^0 = \exp(0 \times \ln x) = \exp 0 = 1 \quad 1^a = \exp(a \times \ln 1) = \exp 0 = 1$$

* Un passage à la limite en 0 justifie la convention $0^a = 0$ lorsque $a > 0$.

★ Le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^a$ dépend de a :

x	0	1	$+\infty$	$(x^a)' = ax^{a-1}$ sauf pour $a = 0$
$a < 0$	$+\infty$	$\searrow 1 \searrow$	0	cas de l'hyperbole $y = x^{-1} = 1/x$
$a = 0$	1	$\rightarrow 1 \rightarrow$	1	la fonction constante $x^0 = 1$
$0 < a < 1$	0	$\nearrow 1 \nearrow$	$+\infty$	de la forme de $\sqrt{x} = x^{1/2}$
$a = 1$	0	$\nearrow 1 \nearrow$	$+\infty$	la fonction identité $x^1 = x$
$1 < a$	0	$\nearrow 1 \nearrow$	$+\infty$	de la forme d'une parabole $y = x^2$

Cette application est strictement croissante pour $a > 0$, et de dérivée nulle en 0 dès que $a > 1$.

* L'application $x \mapsto x^a$ est appelée puissance et l'application $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$ est appelée exponentielle :

$$\begin{aligned} (x^a)' &= (\exp(a \ln x))' = \frac{a}{x} \exp(a \ln x) = ax^{a-1} & \text{si } a \neq 0 \\ (a^x)' &= (\exp(x \ln a))' = \ln a \exp(a \ln x) = \ln a a^x & \text{si } a > 0 \end{aligned}$$

Fonctions trigonométriques

Le chapitre trigonométrie récapitule les propriétés des fonctions sin, cos et tan ; celui sur les complexes détaille les méthodes de linéarisation et de développement.

Fonctions trigonométriques réciproques

■ La restriction de l'application $\sin$ à $[-\pi/2, \pi/2]$ est strictement croissante, à valeurs dans $[-1, 1]$ et dérivable, elle est donc bijective ; l'application réciproque est notée $\arcsin$, est dérivable sur $] -1, 1[$ et est impaire :

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] & \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1 \\ x &\longmapsto \arcsin x \end{aligned}$$

■ La restriction de l'application $\cos$ à $[0, \pi]$ est strictement décroissante, à valeurs dans $[-1, 1]$ et dérivable, elle est donc bijective ; l'application réciproque est notée $\arccos$ et est dérivable sur $] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] & \arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq -1 \\ x &\longmapsto \arccos x \end{aligned}$$

■ La restriction de l'application $\tan$ à $] -\pi/2, \pi/2[$ est strictement croissante, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable, elle est donc bijective ; l'ap-

plication réciproque est notée $\arctan$, est dérivable et est impaire :

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[\quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \in]0, 1[\\ x \longmapsto \arctan x$$

◇ Les dérivées de ces applications réciproques sont celles-ci :

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \\ = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{car } \arccos x \in]0, \pi[$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \\ = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{car } \arcsin x \in]-\pi/2, \pi/2[$$

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

■ Les fonctions de trigonométrie réciproque vérifient ces identités :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } x < 0 \\ +\pi/2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^*$$

◇ Ces égalités peuvent être établies par dérivation et valeur en un point de ces fonctions sur leurs intervalles de définition.

La première application est continue sur le segment $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, et la seconde est définie sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x \quad f(0) = \pi/2$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{sur }]-1, 1[$$

$$g(x) = \arctan x + \arctan(1/x) \quad g(\pm 1) = \pm \pi/2$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^*$$

★ Ces égalités se limitent aux intervalles précisés :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \cos(\arccos x) = x \quad \text{ET} \quad \sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \arccos(\cos x) = x$$

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan x) = x$$

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\quad \arctan(\tan x) = x$$

* Ces propriétés illustrent la résolution d'équations trigonométriques :

$$\tan x = a \in \mathbb{R} \quad \text{ET} \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[\iff x = \arctan a$$

$$\sin x = a \in [-1, 1] \quad \text{ET} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2] \iff x = \arcsin a$$

$$\cos x = a \in [-1, 1] \quad \text{ET} \quad x \in [0, \pi] \iff x = \arccos a$$

* De façon immédiate l'argument θ d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $x \neq 0$ et de partie imaginaire $y \in \mathbb{R}$ vérifie $\tan \theta = y/x$:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \arctan(y/x) \pm \pi & \text{si } x < 0 \text{ en fonction du signe de } y \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

▷ L'angle moitié permet de déterminer directement l'argument d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:

$$\arg z = \theta = 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \in]-\pi, \pi[$$

⇒ La méthode suivante exprime $\tan(\theta/2)$ où $\theta = \arg z$ en fonction des parties réelles et imaginaires de z .

$$x = \operatorname{re} z \quad y = \operatorname{im} z \quad \theta = \arg z$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1}$$

$$\arg z = \theta = 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \in]-\pi, \pi[$$

Cette égalité est définie par une seule formule sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ contrairement à la précédente qui distingue selon les signes de x et de y .

Fonctions hyperboliques

- Les fonctions de trigonométrie hyperbolique sont définies à partir de l'exponentielle par des formules comparables aux formules d'Euler :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \in]-1, 1[$$

- Les propriétés sont les suivantes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$\cosh x = \sinh' x$	$+\infty$	$+$	$+\infty$	$\cosh' x = \sinh x$
$\sinh x = \cosh' x$	$-\infty$	$\nearrow -$	0	$\sinh' x = \cosh x$
$\cosh x$	$+\infty$	$\searrow +$	1	$\nearrow +$

$$1 \leq \cosh x \quad \sinh x < \cosh x \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \in]0, 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh x}{e^x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1$$

La fonction cosh est paire ; les fonctions sinh et tanh sont impaires.

- Les propriétés de l'exponentielle complexe justifient ces égalités :

$$\sin x = -i \sinh(ix) \quad \cos x = \cosh(ix) \quad \tan x = -i \tanh(ix)$$

$$\sinh x = -i \sin(ix) \quad \cosh x = \cos(ix) \quad \tanh x = -i \tan(ix)$$

◇ Le chapitre sur les nombres complexes énonce sans les démontrer les propriétés de l'exponentielle complexe. Elles sont appliquées ici associée aux égalités $i^2 = -1$ et $1/i = -i$:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = -i \sinh(ix)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-i(ix)} + e^{i(ix)}}{2} = \cos(ix)$$

* Ces égalités permettent en particulier d'énoncer les identités remarquables de trigonométrie hyperbolique :

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x & \sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cos(2x) &= 2 \cos^2 x - 1 & \cosh(2x) &= 2 \cosh^2 x - 1 \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x & &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x & &= 1 + 2 \sinh^2 x \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} & \tanh(2x) &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \end{aligned}$$

Une autre démonstration possible consiste à remplacer les fonctions de trigonométrie hyperbolique par leur définition en $e^{\pm x}$.

▷ L'expression des fonctions trigonométriques $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ sous la forme de fractions rationnelles dépendant de $t = \tan(x/2)$ s'adapte aux fonctions hyperboliques :

$$t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \quad \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$$

⇒ La démonstration commence par le développement de $\sinh(2u)$, $\cosh(2u)$ et $\tanh(2u)$:

$$\sinh(2u) = -i \sin(2iu) = -2i \sin(iu) \cos(iu) = 2 \sinh u \cosh u$$

$$\begin{aligned} \cosh(2u) &= \cos(2iu) = \cos^2(iu) - \sin^2(iu) \\ &= \cosh^2 u - i^2 \sinh^2 u = \cosh^2 u + \sinh^2 u \end{aligned}$$

$$\tanh(2u) = \frac{\sinh(2u)}{\cosh(2u)} = \frac{\frac{2 \sinh u \cosh u}{\cosh^2 u}}{\frac{\cosh^2 u + \sinh^2 u}{\cosh^2 u}} = \frac{2 \tanh u \cosh u}{1 + \tanh^2 u}$$

$$\tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$1 - \tanh^2 u = 1 - \frac{\sinh^2 u}{\cosh^2 u} = \frac{\cosh^2 u - \sinh^2 u}{\cosh^2 u} = \frac{1}{\cosh^2 u}$$

$$\cosh^2 u = \frac{1}{1 - \tanh^2 u}$$

$$\cosh x = \frac{2}{1-t^2} - 1 = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$\sinh x = \tanh x \cosh x = \frac{2t}{1-t^2} \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

* Ces égalités sont comparables, aux signes près, à celles obtenues pour les fonctions trigonométriques.

Tableau récapitulatif des dérivées

- Ce formulaire récapitule les dérivées des fonctions usuelles :

$a' = 0$	où $a \in \mathbb{R}$ représente l'application constante	
$x' = (x^1)' = 1$		
$\ln' x = \frac{1}{x}$		sur $\mathbb{R}_+^*$
$\exp' x = (e^x)' = \exp x$		sur $\mathbb{R}$
$(x^0)' = 1' = 0$		
$(x^a)' = a x^{a-1}$	sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ pour $a \in \mathbb{N}^*$ ou $a \in \mathbb{Z}_-^*$	
	sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$ pour $a \geq 1$ ou $a < 1$	
$(a^x)' = \ln a a^x$	pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$	
$\sin' x = \cos x$		sur $\mathbb{R}$
$\cos' x = -\sin x$		sur $\mathbb{R}$
$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	pour $x \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$	
$\sinh' x = \cosh x$		sur $\mathbb{R}$
$\cosh' x = \sinh x$		sur $\mathbb{R}$
$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$		sur $\mathbb{R}$
$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		sur $] -1, 1[$
$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		sur $] -1, 1[$
$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$		sur $\mathbb{R}$

Tableau récapitulatif des limites usuelles

- Les études des fonctions usuelles prouvent ces limites si $a > 1$ et $b > 0$:

$$\begin{aligned}
 +\infty &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \\
 0 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \\
 \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x &= \frac{\pi}{2} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x &= 1
 \end{aligned}$$

- La définition même des dérivées énoncent ces limites :

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \\
 \frac{1}{2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}
 \end{aligned}$$

- ◇ Cette limite est celle de la dérivée de la fonction $\ln$ en 1 :

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \quad \text{de limite } \ln' 1 = \frac{1}{1} = 1.$$

- La fonction $\cos$ vérifie cette limite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

- ◇ La démonstration repose sur l'encadrement de $\cos x$ démontré à l'aide de fonctions auxiliaires dans le chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{x^2}{2} &\leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} & \frac{x^2}{2} &\geq 1 - \cos x \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \\
 \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} &\leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{1}{2} & \text{par encadrement la limite commune est } &\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Exemples de simplifications

* Les exemples suivants exploitent les principales méthodes existant pour simplifier des expressions contenant ces fonctions usuelles. L'une de ces méthodes consiste à simplifier la dérivée f' de la fonction étudiée pour exprimer f plus simplement sur chaque intervalle où elle est définie. Une autre opère des changements de variables.

▷ L'étude d'une fonction auxiliaire montre l'égalité suivante :

$$|\arctan(\sinh x)| = \arccos\left(\frac{1}{\cosh x}\right)$$

⇒ L'application f est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, paire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$; sa dérivée est calculée sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f(x) &= |\arctan(\sinh x)| - \arccos\left(\frac{1}{\cosh x}\right) \\ \sinh(-x) &= -\sinh x & \arctan(-u) &= -\arctan u & f(-x) &= f(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + \sinh^2 x} \cosh x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 x}}} \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} \quad \text{pour } x > 0 \\ &= \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} + \frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh x} - \frac{\cosh x}{|\sinh x|} \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x} - \frac{1}{\cosh x} = 0 \end{aligned}$$

L'application f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, et f est continue en 0, donc f est constante sur $\mathbb{R}_+$, et par parité, f est constante sur $\mathbb{R}$.

En outre $f(0) = \arctan 0 - \arccos 1 = 0 - 0 = 0$. L'égalité recherchée est due au fait que l'application f est nulle sur $\mathbb{R}$.

⇒ La méthode de changement de variables permet aussi de prouver l'égalité précédente $|\arctan(\sinh x)| = \arccos(1/\cosh x)$, d'abord si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan(\sinh x) \in [0, \pi/2[& \tan \theta &= \sinh x > 0 \\ 0 < \cos \theta &= +\sqrt{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\cosh x} \\ \arccos(\cos \theta) &= \arccos\left(\frac{1}{\cosh x}\right) \\ &= \theta = \arctan(\sinh x) \quad \text{pour } x > 0 \end{aligned}$$

Un argument de parité prouve l'égalité recherchée pour $x \leq 0$.

▷ Preuve de $y = 5 \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \arctan\left(\frac{3}{79}\right) = \frac{\pi}{4}$.

⇒ Cette démonstration comporte deux étapes, calculer $\tan y$ et encadrer y . la méthode est générale et s'adapte à la simplification de nombreuses expressions en arctan.

La première étape repose sur la formule d'addition de la fonction $\tan$:

$$\begin{aligned} \tan\left(2 \arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right) &= \frac{\frac{2}{7}}{1 - \frac{1}{49}} = \frac{7}{24} \\ \tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right) &= \frac{\frac{7}{24}}{1 - \frac{49}{24^2}} = \frac{336}{527} \\ \tan(5 \arctan(1/7)) &= \frac{\frac{1}{7} + \frac{336}{527}}{1 - \frac{1}{7} \frac{336}{527}} = \frac{2879}{3353} \\ \tan\left(2 \arctan\left(\frac{3}{79}\right)\right) &= \frac{\frac{6}{79}}{1 - \frac{36}{79^2}} = \frac{237}{3116} \\ \tan y &= \frac{\frac{2879}{3353} + \frac{237}{3116}}{1 - \frac{2879}{3353} \frac{237}{3116}} = 1 & y \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

La seconde effectue ces encadrements :

$$\begin{aligned} 0 < \frac{3}{79} < \frac{1}{7} < \frac{1}{\sqrt{3}} &\implies 0 < \arctan(3/79) < \arctan(1/7) < \frac{\pi}{6} \\ &\implies \begin{cases} 0 < 2 \arctan(3/79) < \frac{\pi}{3} \\ \text{ET } 0 < 5 \arctan(1/7) < \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ &\implies 0 < y < \frac{7\pi}{6} < \frac{5\pi}{4} \\ &\implies y \in]0, 7\pi/6[\end{aligned}$$

La prise en compte de ces deux conditions aboutit à $y = \pi/4$:

$$\begin{aligned} y &\in]0, 7\pi/6[\cap \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \\ &=]0, 7\pi/6[\cap \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \dots \right\} = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

▷ Cette égalité se démontre à partir de l'exponentielle :

$$\left(\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}\right)^n = \frac{1 + \tanh(nx)}{1 - \tanh(nx)}$$

⇒ Ces fractions rationnelles s'expriment donc à l'aide de l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}\right)^n &= \left(\frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}\right)^n = \left(\frac{2e^x}{2e^{-x}}\right)^n = e^{2nx} \\ \frac{1 + \tanh(nx)}{1 - \tanh(nx)} &= \frac{1 + \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}}{1 - \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}} = \frac{2e^{nx}}{2e^{-nx}} = e^{2nx} \end{aligned}$$

▷ Ces deux expressions se simplifient successivement par récurrence :

$$\tan S_n \quad S_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) \quad \text{pour } n \geq 2$$

⇒ Les premières valeurs de $\tan S_n$ sont les suivantes :

$$\tan S_1 = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan S_2 = \tan\left(S_1 + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\tan S_3 = \tan\left(S_2 + \arctan\left(\frac{1}{18}\right)\right) = \frac{2/3 + 1/18}{1 - 2/3 \times 1/18} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$$

Les égalités ci-dessous démontrent par récurrence $\tan S_n = n/(n+1)$ déjà vérifiée si $n \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \tan S_{n+1} &= \frac{\tan S_n + \frac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \tan S_n \times \frac{1}{2(n+1)^2}} = \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \frac{n}{2(n+1)^3}} \\ &= \frac{(2n(n+1) + 1)(n+1)}{2(n+1)^3 - n} = \frac{(2n^2 + 2n + 1)(n+1)}{2n^3 + 6n^2 + 5n + 2} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 2n + 1)}{(n+2)(2n^2 + 2n + 1)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

En conclusion $\tan S_n = n/(n+1)$ et $S_n \in \arctan(n/(n+1)) + \pi\mathbb{Z}$.

⇒ Ces encadrements pour $n \in \{1, 2\}$ justifient $S_n = \arctan(n/(n+1))$ pour les deux premiers termes :

$$0 \leq S_1 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq S_2 - S_1 = \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq S_2 &= (S_2 - S_1) + S_1 = S_1 + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{ET} \quad S_2 &\in \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \pi\mathbb{Z} \end{aligned} \right\}$$

$$\implies S_2 = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

Ces encadrements prouvent $S_n = \arctan(n/(n+1))$ par récurrence :

$$0 \leq S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq S_{n+1} - S_n = \arctan\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right) \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq S_{n+1} &= (S_{n+1} - S_n) + S_n = S_n + \arctan\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right) \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{ET} \quad S_{n+1} &\in \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) + \pi\mathbb{Z} \end{aligned} \right\}$$

$$\implies S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$$