TRIGONOMÉTRIE

Les fonctions $\sin$ *et* $\cos$ *sont définies en admettant la notion et les propriétés géométriques des angles.*

1 - Les équations trigonométriques :

• énoncé du théorème de relèvement sur le cercle trigonométrique,

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2=1 \implies \big(\exists!\,\theta\in]-\pi,\,\pi]\ (x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)\big)$$

• solutions des équations trigonométriques,

$$\begin{aligned}(\cos\theta=\cos\alpha \ \textsf{ET}\ \sin\theta=\sin\alpha) &\iff \theta-\alpha\in 2\pi\mathbb{Z}\\ &\iff \theta\in\alpha+2\pi\mathbb{Z}\\ \cos\theta=\cos\alpha &\iff \theta\in(\alpha+2\pi\mathbb{Z})\cup(-\alpha+2\pi\mathbb{Z})\\ \sin\theta=\sin\alpha &\iff \theta\in(\alpha+2\pi\mathbb{Z})\cup(\pi-\alpha+2\pi\mathbb{Z})\end{aligned}$$

• cas particuliers $\cos\theta=0$, 1 ou -1, et $\sin\theta=0$, 1 ou -1,

• résolution de $\cos(5x)=\sin(3x)$ sur $]-\pi,\,\pi]$

$$\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{16},\frac{5\pi}{16},\frac{9\pi}{16},\frac{13\pi}{16},-\frac{3\pi}{16},-\frac{7\pi}{16},-\frac{11\pi}{16},-\frac{15\pi}{16}\right\}.$$

2 - Formules d'addition $\cos(a\pm b)$ et $\sin(a\pm b)$, et conséquences :

• démonstration géométrique,

Les vecteurs $\boldsymbol{u}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\sin\alpha\,\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{v}=-\sin\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\alpha\,\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont obtenus par rotation d'angle α de $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$,

$\boldsymbol{w}=\cos\beta\,\boldsymbol{i}+\sin\beta\,\boldsymbol{j}$ par rotation d'angle β de $\boldsymbol{u}$,

c'est-à-dire rotation $\alpha+\beta$ de $\boldsymbol{i}$,

les coordonnées de $\boldsymbol{w}$ donnent les deux formules d'addition.

• déphasage,

c'est-à-dire mise sous la forme $\lambda\,\sin\theta+\mu\,\cos\theta=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,\sin(\theta+\varphi)$

par le théorème de relèvement,

exemple $\sqrt{3}\,\cos\theta+3\,\sin\theta=2\sqrt{3}\,\sin(\theta+\pi/6)=2\sqrt{3}\,\cos(\theta-\pi/3)$.

3 - Produits et sommes de fonctions trigonométriques :

• produits par somme et différence des formules d'addition,

• somme et différence $\sin p\pm\sin q$ et $\cos p\pm\cos q$,

par $a=(p+q)/2$ et $b=(p-q)/2$, donc $a+b=p$ et $a-b=q$,

• résolution de l'équation $\cos(3x)=\sin(5x)-\sin x$,

par la différence des deux sinus puis factorisation

$$\sin(5x)-\sin x=2\,\cos(3x)\,\sin(2x)$$

$$\sin(5x)-\sin x-\cos(3x)=\cos(3x)(2\,\sin(2x)-1)=0$$

$$\mathcal{S}=x\in\frac{\pi}{12}+\pi\mathbb{Z}\ \cup\ \frac{5\pi}{12}+\pi\mathbb{Z}$$

• factoriser $\sin(a+b)-\sin a-\sin b$ par $a+b=2(a+b)/2$,

$$\begin{aligned}&\sin(a+b)-\sin a-\sin b=\sin(a+b)-(\sin a+\sin b)\\ &=\sin(a+b)-2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &=2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos(\frac{a+b}{2})-2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &=2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)-\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)\\ &=-4\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a}{2}\right)\,\sin\left(\frac{b}{2}\right)\end{aligned}$$

4 - Fonction tangente $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$:

• dérivée $\tan' x=1+\tan^2 x=1/\cos^2 x$,

• formulaire avec $\tan(\pi+x)=\tan x$ et $\tan(\pi/2-x)=1/\tan x$,

• formules $\tan(a\pm b)$ à démontrer par $\sin(a\pm b)$ et $\cos(a\pm b)$,

• équation $\tan x=\tan\theta\iff x\in\theta+\pi\mathbb{Z}$.

5 - Angles moitiés où $t=\tan(x/2)$:

$$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

démonstration et cas particuliers.

6 - Graphe et schéma :

• graphes de $y=\sin x$, $y=cosx$ et $y=\tan x$,

• schémas récapitulatifs sur le cercle trigonométrique,

application du théorème affine de Thalès.

7 - Calculs algébriques de fonctions trigonométriques :

• développement de $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$,

• racines du polynôme en $\cos\theta$,

• en déduire $\cos(k\pi/5)$ et $\sin(k\pi/5)$ où $k\in[\![0,5]\!]$,

• calcul de $\cos(\pi/30)$ et $\sin(\pi/30)$ à partir de $\pi/30=\pi/5-\pi/6$,

• encadrement $\sin x\le x\le\tan x$ pour tout $x\in[0,\,\pi/2[$,

par l'étude des fonctions auxiliaires $x\mapsto x-\sin x$ et $x\mapsto\tan x-x$.