

COMPLEXES

Les complexes sont construits à partir d'un couple de réels, les propriétés des opérations sur les réels sont supposées connues.

1 - La structure $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps :

l'élément nul $0_{\mathbb{C}}$ et l'élément unité $1_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$,

l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne associatives, commutatives, et avec un élément neutre, tout complexe possède un opposé, c'est-à-dire un symétrique pour $+$, tout complexe non nul possède un inverse, un symétrique pour $\times$, démonstration en (x, y) de l'inverse $1/z = \bar{z}/|z|^2$ quand $z = x + iy$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

2 - Partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module :

- formulaires, distinguer $\operatorname{re}(\lambda z)$ quand $\lambda \in \mathbb{R}$, $\operatorname{re}(iz)$ et $\operatorname{re}(zz')$, $\operatorname{re} z$ et $\operatorname{im} z$ à partir de z et $\bar{z}$,
- ensemble des solutions des équations $\bar{z} = z$ et $\bar{z} = -z$,
- démonstration de $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,
montrer par récurrence $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, et $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$,
- démonstration de $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, par l'égalité des carrés, conséquence à $|z^n| = |z|^n$,
- $|\operatorname{re} z| \leq |z|$ et $|\operatorname{im} z| \leq |z|$,
résolution des équations $|z| = 0$ et $z = |z|$.

3 - Inégalités triangulaires :

- les quatre inégalités triangulaires,
- démonstration de la principale $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
par le carré et la partie réelle $z_1 \bar{z}_2$,
- démonstration des trois autres par $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$, etc.
- cas d'égalité dans les inégalités triangulaires,
- exemples de résolution $5 \pm |z| = |z - 4 + 3i|$.

4 - Exponentielle complexe :

- définition, formulaire,
démonstrations par la trigonométrie et les formules d'addition, solutions de $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$, c'est-à-dire $\beta - \alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$,
- formule d'Euler $\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ et $\sin \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$,
- factorisations de $1 \pm e^{i\theta}$ et de $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$,
- analogies et différences des exponentielles réelles et complexes.

5 - Argument d'un nombre complexe, notation polaire :

- définitions de l'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$:

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in]-\pi, \pi]\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$$

par le théorème de relèvement en trigonométrie,

- définition, formulaire $\arg(-z)$, $\arg(1/z) = \arg(\bar{z})$, etc.,
- cas d'égalité de deux nombres complexes $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$

$$(r_2 = r_1 \text{ ET } \theta_2 \in \theta_1 + 2\pi\mathbb{Z}) \quad \text{quand } (r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^4$$

$$\text{OU } (r_2 = -r_1 \text{ ET } \theta_2 \in \pi + \theta_1 + 2\pi\mathbb{Z}) \quad \text{OU } r_1 = r_2 = 0.$$

6 - Racines de l'unité, racines en coordonnées polaires :

- définition des racines $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ d'ordre n de 1, formulaire, schéma,
 $\mathbb{U}_n = \{z \mid z^n = 1\} = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in [0, n-1]\}$
- cas $j = e^{2i\pi/3}$ pour $n = 3$,
- somme nulle $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$ des racines d'ordre n de 1,
- écriture polaire des n racines n^e de $z = r e^{i\theta}$ où $r > 0$: $\sqrt[n]{r} e^{i\theta/n} \mathbb{U}_n$.

7 - Racines carrées calculées de façon algébrique :

- méthode de calcul algébrique des racines carrées,
par somme et différence de la partie réelle et du module,
discussion sur le signe de la partie imaginaire,
deux justifications de l'inclusion réciproque,
- application aux racines des polynômes du second degré,
somme et produit des deux racines,
- racines carrées et quatrième de $7 \pm 24i$.

8 - Exemples récapitulatifs :

- racines de $Z^2 - 2 \cos \theta Z + 1$, $Z^4 - 2 \cos \theta Z^2 + 1$ et $Z^4 - m Z^2 + 1$,
- racines de $(Z^2 - 1)^3 = -8 Z^3$.