LES NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES

Ce chapitre admet la propriété que $\mathbb{R}$ est un corps et la relation d'ordre total $\leq$ compatible avec l'addition et la multiplicaiton.

1 - Sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et produits $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$:

• formulaire de manipulation de sommes,
cas des sommes et des produits avec 1 ou 0 termes,
l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne associatives, commutatives, et avec un élément neutre,
illustration avec le factoriel $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ et la puissance,

• exemples de calcul de sommes et de produits,

$$\sum_{k=1}^{n} k \qquad \sum_{k=1}^{n}(2k) \qquad \sum_{k=0}^{n}(2k+1) \qquad \prod_{k=1}^{n}(2k) \qquad \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$$

• exemples de sommes et produits télescopiques,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{par} \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right) \qquad \prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$$

2 - Séries géométriques et applications trigonométriques :

• produit remarquable $(x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = x^{n+1} - y^{n+1}$,

• série géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ en distinguant les deux cas $q=1$ et $q \neq 1$,

• transformation des séries trigonométriques en séries géométriques :

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) \quad S = \sum_{k=0}^{n} \sin(2k\theta) \qquad E = \sum_{k=0}^{n} e^{2\,\mathrm{i}\,k\pi} = \sum_{k=0}^{n} (e^{2\,\mathrm{i}\,\pi})^k$$

$$E = C + \mathrm{i}S \quad C = \operatorname{re} E \quad S = \operatorname{im} E \quad \text{discution si } \theta \in \pi\mathbb{Z},$$

Factorisation complète et linéarisation du numérateur.

3 - Coefficients du binôme, triangle de Pascal et formule du binôme :

• définition $\displaystyle\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ quand $0 \leq m \leq n$, et formulaire,
vérification de $\displaystyle\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} = \binom{n}{m}$ quand $1 \leq m < n$,
conséquence sur $\displaystyle\binom{m}{n} \in \mathbb{N}^*$ et construction du triangle de Pascal,

• formule du binôme de Newton : $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$,
démonstration par récurrence,
symétrie de la formule $(x+y)^n = (y+x)^n$, applications à $(1 \pm x)^n$.

4 - Linéarisation et développement des formules de trigonométrie :

• développement de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ par la formule du binôme sur

$$\cos(n\theta) = \operatorname{re}(e^{in\theta}) = \operatorname{re}((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n)$$
$$\sin(n\theta) = \operatorname{im}(e^{in\theta}) = \operatorname{im}((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n)$$

transformation éventuelle de $\sin^{2p}\theta = (1-\cos^2\theta)^p$, etc.
exemples de $\cos(4\theta)$, $\sin(3\theta)$, etc.

• linéarisation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ par les formules d'Euler,

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}(e^{ii\theta} + e^{-ii\theta})^n \qquad \sin^n\theta = \frac{(-\mathrm{i})^n}{2^n}(e^{ii\theta} - e^{-ii\theta})^n$$

simplification des termes de la somme du binôme en $e^{\mathrm{i}\,(n-2k)\theta}$,
regroupement des termes d'indices k et $n-k$,
et simplification en $2\cos((n-2k)\theta)$ ou $2\mathrm{i}\sin((n-2k)\theta)$,
exemples de $\cos^4\theta$, $\sin^3 theta$, etc.

5 - Trois fonctions usuelles, définitions et formulaire :

• valeur absolue $|x| = \max(x, -x) \geq 0$, inégalité triangulaire,
• racines carrée $\sqrt{\bullet}$ et racine $\sqrt[n]{\bullet}$ d'ordre n, par les puissances entières,
• partie entière $\lfloor\bullet\rfloor$ et $\mathbb{Z}$ est discret, étude de $2\lfloor 3x\rfloor - 3\lfloor 2x\rfloor$.

6 - Propriétés d'une loi de composition interne $\star$, en général associative :

• unicité de l'élément neutre et du symétrique,
• symétrique de l'élément neutre, du produit, du symétrique,
• tout élément avec un symétrique est régulier,
• si e est élément neutre pour $\perp$ qui est régulière, et si $\star$ est distributive par rapport à $\perp$, alors e est élément absorbant pour $\star$.