

## APPLICATIONS

Toute application  $f : E \rightarrow F$  est définie par un ensemble de départ  $E$ , un ensemble d'arrivée  $F$  et son graphe  $\mathcal{G} \subset E \times F$  vérifiant cette condition :

$$\forall x \in E \quad \exists ! y \in F \quad (x, y) \in \mathcal{G} \quad \text{on note } y = f(x).$$

L'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  est noté  $F^E$ .

Représentations par un diagramme reliant deux ensembles et le graphe d'une application.

Recherche de l'image d'un élément, des éventuels antécédents...

### 1 - Composition, l'opérateur $\circ$ :

l'opérateur  $\circ$  est associatif,

Même si  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont tous les deux définis, l'opérateur  $\circ$  n'est pas en général commutatif.

$\text{Id}_E$  est l'élément neutre sur la structure  $(E^E, \circ)$ .

### 2 - Image directe et image réciproque :

- définition de  $f(A)$  et  $f^{-1}(B)$  quand  $f : E \rightarrow F$ ,  $A \subset E$  et  $B \subset F$ ,
- inclusions  $A \subset f^{-1}(f(A))$  et  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
- images directes et inverses d'intersection et de réunion,
- démonstrations de ces propriétés,
- exercice :  $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

### 3 - Injection et surjection :

- définition d'une application injective, d'une application surjective par les quantificateurs, et  $f : E \rightarrow F$  est surjective ssi  $\text{Im } f = F$ ,
- expression de la non-injectivité et de la non-surjectivité, exemples de diagrammes,
- la composition de deux applications injectives est injective, la composition de deux applications surjectives est surjective,
- Si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective,  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective,
- $f : E \rightarrow F$  est injective ssi il existe  $\varphi \in E^F$  vérifiant  $\varphi \circ f = \text{Id}_E$ ,  $f : E \rightarrow F$  est surjective ssi il existe  $\psi \in E^F$  vérifiant  $f \circ \psi = \text{Id}_F$ .

### 4 - Applications bijectives, c'est-à-dire injectives et surjectives :

- $f : E \rightarrow F$  est bijective ssi il existe  $\varphi \in E^F$  et  $\psi \in F^E$  vérifiant  $\varphi \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ \psi = \text{Id}_F$  ;
- dans ce cas  $\varphi$  et  $\psi$  sont uniques et égaux, et l'application  $\varphi = \psi$  est notée  $f^{-1}$ ,
- cas de  $g \circ f$  et de  $f \circ g$  quand  $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$  et  $g(n) = 2n$ .
- Les applications  $\text{Id}_E$ ,  $f^{-1}$  et  $g \circ f$  sont bijectives si  $f$  et  $g$  le sont :

$$\text{Id}_E^{-1} = \text{Id}_E \quad (f^{-1})^{-1} = f \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$