LOGIQUE ET THÉORIE DES ENSEMBLES

relations binaires, récurrences, résolution d'équations

Ce chapitre termine les bases de la logique.

1 - Les relations binaires :

- définition d'une relation binaire sur E , de son graphe $\mathcal{G} \subset E^2$,
- relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

2 - Les relations d'ordre :

- relation réflexive, antisymétrique, transitive,
- définition de l'ordre total,
- l'inclusion $\subset$ et la comparaison $\leq$ sont des relations d'ordre,
- l'ordre $\subset$ est total si et seulement si E a au maximum un élément.
- définition du plus petit élément d'un ensemble, s'il existe, démonstration de l'unicité, idem plus grand élément.

3 - Les relations d'équivalence et les classes d'équivalences :

- relation réflexive, symétrique, transitive,
- par exemple la congruence modulo 3 dans $\mathbb{Z}$,
- définition de la classe d'équivalence $\dot{a} \subset E$ de $a \in E$,
- théorème des classes d'équivalences, et démonstration :

$$a\mathcal{R}b \iff a \in \dot{b} \iff b \in \dot{a}$$

$$\iff \dot{a} \subset \dot{b} \iff \dot{b} \subset \dot{a} \iff \dot{a} = \dot{b} \iff \dot{a} \cap \dot{b} \neq \emptyset$$

- les classes d'équivalences forment une partition de E , sous-ensembles non vides, disjoints 2 à 2, de réunion l'ensemble total.

4 - Les entiers naturels :

- construction de $\mathbb{N}$ à partir de 0 et de $\bullet + 1$,
- relation d'ordre $\leq$ usuelle sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ est discret,
- propriété caractéristique de $\mathbb{N}$, tout sous-ensemble non vide a un plus petit élément, tout sous-ensemble non vide et majoré a un plus grand élément, $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

5 - Les théorèmes de récurrence :

- récurrence simple $P(n) \implies P(n+1)$, démonstration à partir de la propriété caractéristique,
- récurrence sur tous les prédécesseurs, $P(0) \text{ ET } P(1) \text{ ET } \dots \text{ ET } P(n) \implies P(n+1)$, démonstration à partir du théorème précédent,
- récurrence sur deux prédécesseurs $P(n) \text{ ET } P(n+1) \implies P(n+2)$, démonstration à partir du théorème de récurrence simple,
- calculs de $\sum_{k=0}^n k k!$,

$$\text{calcul de } u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2 u_{n/2} & \text{si } n > 0 \text{ est pair} \\ 3 + u_{n-1} & \text{si } n > 0 \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\text{calcul de } u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 3 & \text{si } n = 1 \\ 3u_{n-1} - 2u_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

6 - Analyse et synthèse dans la résolution d'équations :

exemple de résolution de $\sqrt{2x-1} = 3-2x$, d'une part par analyse et synthèse, et d'autre part par équivalence.

7 - Exemples de résolution de systèmes linéaires :

- résolution de $\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = a \end{cases}$ en fonction de a ,
- résolution de $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + ay = ab \\ bz = a \end{cases}$

8 - Les systèmes de Cramer d'ordre 2 quand $ad - bc \neq 0$:

$$\text{résolution de } \begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases}$$