PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1 - Définition des primitives et des intégrales sur un intervalle
- l'ensemble de primitives à partir d'une primitive F donnée de f,
- définition cohérente de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par une primitive,
- existence admise des primitives d'applications continues,
- exemple d'intégrale d'application non continue,
- $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t = \Big[|t|\Big]_a^b$ et $|\bullet|$ n'est pas une primitive car pas dérivable.
- primitive de f' quand f est de classe $\mathcal{C}^1$,
- dérivées de $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2 - Propriétés de base de l'intégrale :
- l'intégrale est linéaire, additive et positive,
- démonstrations de ces propriétés, par les primitives,
- inégalité stricte pour les applications positives et continues ...
- illustration que la continuité est nécessaire pour l'inégalité stricte.

3 - Deux transformation d'intégrales :
- intégration par parties et changement de variables,
- démonstration par des fonctions auxiliaires,
- rédaction du changement de variables,
- exemples sur $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1+\ln x}{x}$ et $\displaystyle\int_0^2 t\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{e^4-1}{2e^4}$.

4 - Primitives de base :
- de polynômes, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-r}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^n}$,
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$, $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\pm 1}$ et $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2\pm 1)^n}$,
- récurrence sur $\displaystyle I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}$: $\displaystyle I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,I_n$.

5 - Primitives des fractions rationnelles
- par décomposition en éléments simples,
- mise sous forme canonique des dénominateurs de 2e espèce, changement de variable affine pour un dénominateur en z^2+1,

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \arctan(x+2)$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4} = \frac{-1}{x+2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3} = \frac{\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|}{2}$$

- changement de variables $y = e^{ax}$ des intégrales en e^{ax}, changement de variables $y = \sqrt{ax+b}$ des intégrales en $\sqrt{ax+b}$,

6 - Intégrales de fractions trigonométriques :
- trois cas simples $\displaystyle\int f(\sin x)\,\cos x\,\mathrm{d}x$, etc.
- règle de Bioche dans $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x$: en fonction de $g(-x) = -g(x)$, $g(\pi - x) = -g(x)$ et $g(\pi + x) = g(x)$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \frac{\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}{2} = \ln|\tan(x/2)|$$

- cas général par $t = \tan(x/2)$,
- autres simplifications :

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotan} x$, $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$,

$\displaystyle\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$ par linéarisation,
- application à la trigonométrie hyperbolique, ou $y = e^x$.

7 - Intégrales de fonctions en $\sqrt{\pm x^2 + ux + v}$:
- par la forme canonique qui changement de variable affine, pour obtenir $\sqrt{\pm z^2 \pm 1}$, puis par trigonométrie :
- $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$

8 - Formule de Taylor reste intégral de f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,\, b]$:

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

démonstration par récurrence avec une intégration par parties.

9 - Inégalité de Cauchy Schwarz des applications continues :

$$\Big(\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 \le \Big(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

démonstration par le discriminant $\displaystyle\int_a^b (\lambda\, f(t) + g(t))^2\,\mathrm{d}t$.