LE CORPS DES NOMBRES RÉELS

Ce chapitre admet le principe de la coupure et pose les bases de l'analyse : étude des suites et continuité dans les prochains chapitres.

1 - Présentation décimale des réels :

- toute partie fractionnaire d'un réel est définie de façon unique par une suite de chiffres non tous égaux à 9 à partir d'un certain rang (admis),
- $0,99999\dots = 1,0000\dots$,
- l'écriture décimale de $x \in \mathbb{R}$ est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$, démonstration,
- $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres réels non rationnels.

2 - Récapitulatif de $\mathbb{R}$:

- la structure $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps,
- la relation d'ordre $\leq$ est totale, elle est compatible avec l'addition et la multiplication,
- le corps $\mathbb{R}$ est archimédien : $\forall h > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq nh$
démonstration avec $n = \lfloor 1/h \rfloor + 1$.

3 - Majorant et minorant d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, plus grand et plus petit élément de A :

- les quatre définitions,
- le plus grand élément s'il existe est unique, le plus grand élément est un majorant,
- démonstrations que $\min \mathbb{R}_-$ et $\min]0, 1]$ ne sont pas définis.

4 - Borne supérieure et principe de la coupure :

- définition $\sup A$ est le plus petit des majorants,
- exemples de construction de l'ensemble des majorants pour $]0, 4[$ par l'absurde avec 2 inclusions, $[0, 4]$ et $\{0, 1, 2, 3, 4\}$,
- propriété caractéristique de la borne supérieure c , avec $\forall d < c \dots$ et avec $\forall h > 0 \dots$, où $d = c - h$,
- énoncé du principe de la coupure sur $\mathbb{R}$.

5 - Lien entre borne supérieure et plus grand élément :

- Si $\max A$ existe alors $\sup A = \max A$,
- Si $\sup A \in A$ alors $\max A = \sup A$.

6 - Exercices :

- $\min E, \max E, \inf E, \sup E$ quand $E = \left\{ \frac{n+1}{n^2+4} / n \in \mathbb{N} \right\}$,
- $\sup(\lambda A), \sup(-A)$ et $\sup(A+B)$ quand A et B sont des sous-ensembles bornés et non vides de $\mathbb{R}$, démonstration par la propriété caractéristique,
- démonstration de :
 $\forall h > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad 1 < nh \iff \forall h > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq nh$,
- démonstration de l'égalité : $x = y \iff (\forall h > 0 \quad |y - x| \leq h)$.

7 - Développement décimal par défaut a_n et par excès b_n d'un réel :

- encadrement $10\lfloor u \rfloor \leq \lfloor 10u \rfloor \leq 10u < \lfloor 10u \rfloor + 1 \leq 10(\lfloor u \rfloor + 1)$,
- les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont monotones, elles convergent vers x à partir de l'encadrement $x - 10^{-n} < a_n \leq x$.

8 - Définition de la densité de $A \subset \mathbb{R}$:

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall h > 0 \quad A \cap [x-h, x+h] \neq \emptyset$
- $\mathbb{Q}, \sqrt{2} + \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$,
 $\left\{ \frac{a}{2^n} / a \in \mathbb{Z} \text{ ET } n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.