MANIPULATION DES LIMITES DE SUITES

Ce chapitre pose la définition des limites des suites.

1 - Convergence d'une suite :
- définition par les quantificateurs,
- deux démonstrations de l'unicité de la limite,par l'absurde,
ou par $\forall \varepsilon > 0 \quad |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leq \varepsilon$, pour n bien choisi.
- exemples de limite d'une suite constante, de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,
- extension de la définition aux limites $\pm\infty$.

2 - Opérations sur les limites :
- définition de $\overline{\mathbb{R}}$ et extensions des opérations,
- formes indéterminées $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $1/0$, ∞/∞, 1^∞, ∞^0, 0^0.
- exemples de démonstrations de limites, dans les cas finis et infinis :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda v_n \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n + v_n \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n v_n$$

3 - Suites extraites :
- définition de la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
- démonstration par récurrence de $\varphi(n) \geq n$,
pour toute apllication $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante,
- la limite de toute suite extraite est la même que celle de la suite,
réciproque fausse avec la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- démonstration d'une suite sans limite par deux suites extraites de limites différentes.

4 - Suites extraites d'ordre pair et impair :
- Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite,
alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet cette limite,
- démonstration.

5 - Théorème de composition des limites :
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$,
- démonstration des différents cas, limites finies ou infinies.

6 - Suites bornées :
- expression des suites bornées, par $|u_n|$ ou par minorée et majorée.
- toute suite convergente est bornée, démonstration,
- toute suite de limite $+\infty$ est minorée et non majorée.
- réciproques fausses sur des exemples.

7 - Exemples de limites :
- limite d'une suite bornée par une suite de limite nulle,
- limite infinie d'une suite strictement positive de limite nulle,
- équivalence entre $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.

8 - Limites et inégalités :
- valeur d'une suite de limite strictement positive,
démonstration avec $\varepsilon = \ell/2 > 0$,
- passage à la limite des les inégalités larges,
démonstration par l'absurde,
- théorème d'encadrement dans les limites,
par le lemme $0 \leq u_n \leq v_n \to 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

9 - Méthode de Cesaro :
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n} = 0$, démonstration,
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n} = \ell$, démonstration,
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n} = \pm\infty$, démonstration,
- Exemples d'applications

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$$