THÉORÈMES DE CONVERGENCE DES SUITES

Ce chapitre démontre à partir du principe de la coupure les principaux théorèmes de convergence des suites réelles.

1 - Théorèmes des suites monotones :
• théorème de convergence des suites croissantes et majorées, preuve, par la propriété caractéristique de la borne supérieure,
• limite $+\infty$ de toute suite croissante et non majorée,
• existence générale de limites, finies ou non,
pour toute suite monotone, bornée ou non.

2 - Définition, théorème des suites adjacentes et démonstration.

3 - Exemples d'utilisation :
• convergence et encadrement des deux suites :

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\,n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

• convergence de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
limite calculée par la formule de Taylor reste intégral.

4 - Théorème des segments emboîtés :
• démonstration par les suites adjacentes,
• exemples d'autres cas d'intersections d'intervalles décroissants, fermés ou ouverts, vers $\pm\infty$, etc.

5 - Théorème de Bolzano-Weierstrass :
• Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée à valeurs dans $[a,\,b]$ possède une suite extraite convergente,
• démonstration par récurrence, où l'hypothèse est la suivante :

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n \qquad b_0 > a_1 > \cdots > a_n \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$0 = \varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n) = \min \mathcal{E}_n$$

$$\mathcal{E}_n = \left\{p \geq \varphi(n) \;/\; a_n \leq u_p \leq b_n\right\} = \{\varphi(n)\} \cup \mathcal{I}_{n+1} \cup \mathcal{S}_{n+1}$$

$$\mathcal{I}_{n+1} = \left\{p > \varphi(n) \;/\; a_n \leq u_p \leq \frac{a_n+b_n}{2}\right\} \quad \mathcal{E}_n \text{ est infini}$$

$$\mathcal{S}_{n+1} = \left\{p > \varphi(n) \;/\; \frac{a_n+b_n}{2} \leq u_p \leq b_n\right\}$$

l'un au moins des ensembles $\mathcal{I}_{n+1}$ ou $\mathcal{S}_{n+1}$ est infini, et devient $\mathcal{E}_{n+1}$.

6 - Rappels des propriétés des suites bornées, extraites et convergentes :
• Toute suite convergente est bornée,
• Toute suite extraite d'une suite convergente admet la même limite,
• contres-exemples des réciproques fausses.
• illustration de Bolzano-Weierstrass sur la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7 - Exemples de suites $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ sans limite :
par l'absurde par $\sin(n+2)-\sin(n)$ puis $\cos(n+2)-\cos(n)$.