STRUCTURES

1 - Étude des groupes à partir de leur définition :
- preuve de l'unicité de l'élément neutre e et du symétrique x^{-1},
- calculs e^{-1}, $(x^{-1})^{-1}$ et de $(x{\star}y)^{-1}$, et preuve des éléments réguliers.

2 - Exemples de groupes :
- $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{U},\times)$, $(\mathbb{U}_n,\times)$, etc.
- $(E^E,\circ)$ n'est pas un groupe si $|E|\geq 2$,
- $(\mathcal{S}_E,\circ)$ est un groupe, et n'est pas commutatif si $|E|\geq 3$,
- G^X est un groupe pour la loi des applications $f{\star}g : x\mapsto f(x){\star}g(x)$.

3 - Équations et applications dans le groupe $(G,\star)$:
- étude des équations $a\star x=b$ et $x\star a=b$ d'inconnue $x\in G$,
- étude des applications $f_a : x\mapsto a\star x$ et $g_a : x\mapsto x\star a$ dans $(G,\star)$,
- compositions $f_a\circ f_b=f_{a\star b}$ et $g_a\circ g_b=g_{b\star a}$,
- applications réciproques $f_a^{-1}=f_{a^{-1}}$ et $g_a^{-1}=g_{a^{-1}}$.

4 - Étude des sous-groupes :
- définition,
- démonstration que H est stable par $\star$: $H\star H\subset H$,
- démonstration que $e\in H$ et que H est stable par inverse,

5 - Propriété caractéristique du sous-groupe H du groupe $(G,\star)$:
- $H\subset G$ $\textsf{ET}$ $e\in H$ $\textsf{ET}$ $\forall\,(x,y)\in H^2\ x\star y\in H$ $\textsf{ET}$ $\forall\,x\in H\ x^{-1}\in H$,
- $H\subset G$ $\textsf{ET}$ $H\neq\emptyset$ $\textsf{ET}$ $\forall\,(x,y)\in H^2\ x\star y^{-1}\in H$.

6 - Exemples de sous-groupes :
- vérification des sous-groupes additifs $p\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$,
- vérifications $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ sous-groupes multiplicatifs,
- sous-groupe additif des applications continues $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

7 - Intersection et réunion de sous-groupes :
- l'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe,
- exercice, la réunion de deux sous-groupes :

$$H\cup K \text{ est un sous-groupe} \iff H\subset K \textsf{ OU } K\subset H$$

- cas $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}=6\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$.

8 - Étude des anneaux $(\mathbb{A},+,\times)$:

- définition, $0_{\mathbb{A}}\,x=0_{\mathbb{A}}$, $-(xy)=(-x)y=x\,(-y)$ et $-x=(-1_{\mathbb{A}})x$.

9 - $\mathbb{U}(\mathbb{A})$ est l'ensemble des éléments inversibles :
- la structure $(\mathbb{U}(\mathbb{A}),\times)$ des éléments inversibles de $\mathbb{A}$ est un groupe,
- cas des éléments inversibles de $\mathbb{U}(\mathbb{Z})$ et de $\mathbb{U}(\mathbb{K}[X])$,
- cas des éléments inversibles de $\mathbb{U}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{U}(\mathbb{C})$, de $\mathbb{U}(\mathbb{K}(X))$.

10 - Les produits remarquables dans l'anneau $\mathbb{A}$:
- les sommes sont commutatives, et les produits non commutatifs,
- distinguer les cas $xy\neq yx$ et $xy=yx$ dans $(x{+}y)^2$ et $(x{-}y)(x{+}y)$,
- formule du binôme et de la série géométrique quand $xy=yx$:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}x^k\,y^{n-k}\qquad (x-y)\sum_{k=0}^{n}x^k\,y^{n-k}=x^{n+1}-y^{n+1}$$

- cas avec $1_{\mathbb{A}}\pm x$, calcul de l'inverse de $(1_{\mathbb{A}}\pm x)^{-1}$ pour x nilpotent.

11 - Définition de la structure d'un corps $(\mathbb{K},+,\times)$: $\mathbb{U}(\mathbb{K})=\mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\}$.

12 - Les sous-groupes H de $\mathbb{Z}$ et K de $\mathbb{R}$:
- si $H\neq\{0\}$, vérifier que $H=m\mathbb{Z}$ où $m=\min\left\{h\in H\ \big/\ h>0\right\}$,
- si $K\neq\{0\}$ et $m=\inf\left\{h\in H\ \big/\ h>0\right\}>0$, vérifier que $K=m\mathbb{Z}$,
- si $K\neq\{0\}$ et $m=0$,vérifier que K est dense dans $\mathbb{R}$.

13 - Anneau de Boole, est défini par $x^2=x$ pour tout $x\in\mathcal{A}$:
- démontrer par $(x+y)^2$ que $xy+yx=0$, puis que $x+x=0$,
- en déduire et que $\mathcal{A}$ est commutatif,
- vérifier que la relation $x\preccurlyeq y\iff yx=x$ est une relation d'ordre,
- montrer que $xy(x+y)=0$,
- en déduire qu'un tel anneau intègre a deux éléments,
- illustrer l'anneau de Boole avec les booléens : $(\{\textsf{V},\textsf{F}\},\textsf{XOU},\textsf{ET})$.

14 - Morphisme de groupes $f:(G,\star)\to(H\perp)$: $f(x\star y)=f(x)\perp f(y)$.
- l'image de l'élément neutre $e\in G$ est l'élément neutre $e'\in H$,
- l'image du symétrique est le symétrique de l'image :
- la composition de deux morphismes est un morphisme,
- l'application réciproque d'un morphisme bijectif est un morphisme.