

RELATIONS DE COMPARAISON

Définitions des suites négligeables, équivalentes et dominées,

Définitions similaires associées aux fonctions en $a \in \mathbb{R}$,

Distinction des cas où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang par les limites, et du cas général avec les quantificateurs :

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \\ \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

1 - Formulaire des suites négligeables, y compris si elles s'annulent :

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \text{ ET } v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \implies u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \text{ ET } v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \implies u_n \pm v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \quad \dots$$

2 - Propriétés des suites équivalentes :

- la relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites,
- deux propriétés sur les limites et les suites équivalentes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ ET } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}^* \implies u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

- si les suites tendent vers $+\infty$ ou 0, équivalence des logarithmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ ET } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \implies \ln u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n$$

- condition nécessaire et suffisante d'équivalence de l'exponentielle :

$$e^{u_n} \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$$

- conservation des équivalents par produits, quotients, puissances,
- non conservation des équivalents par les limites et les sommes,
- non conservation par les exponentielles et les logarithmes.

3 - Échelle de comparaison des fonctions vers $+\infty$ où $a > 0$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$a^x x^b \ln^c x = o_{x \rightarrow +\infty}(a^x x^\beta \ln^\gamma x) \iff \begin{cases} a < \alpha \\ \text{OU } (a = \alpha \text{ ET } b < \beta) \\ \text{OU } (a = \alpha \text{ ET } b = \beta \text{ ET } c < \gamma) \end{cases}$$

- à partir des limites usuelles $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^c x$,

- limites asymptotique de $\frac{\exp x}{x}$ et $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$ par les dérivées,
- conséquences sur les limites a^x/x , a^x/x^b , $\ln x/x^b$ et $\ln^c x/x^b$,
- réciproque du théorème, éventuellement $a^x x^b \ln^c x = a^x x^{b+1} \frac{\ln^c x}{x}$,
- sens direct du théorème général, par la contraposée,
- la négation échange (a, b, c) et (α, β, γ) , sauf cas $(a, b, c) = (\alpha, \beta, \gamma)$,
- cas des limites avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$ ou (a, b, c) .

4 - Comparaison des fonctions usuelles à droite en 0 :

$$x^b |\ln x|^c = o_{x \rightarrow 0}(x^\beta |\ln x|^\gamma) \iff b > \beta \text{ OU } (b = \beta \text{ ET } c < \gamma)$$

- remarquons $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ et les rôles différents des signes de b et c :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^b = 0 \iff b > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} |\ln x|^c = 0 \iff c < 0$$

- démonstration par composition des limites $x \mapsto 1/x$.

5 - Relations entre les suites négligeables et les suites équivalentes :

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff u_n + v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n \iff a_n - b_n = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$$

6 - Deux suites équivalentes sont strictement du même signe à partir d'un certain rang ; démonstration avec $\varepsilon = 1/2 > 0$:

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \implies \left[\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \begin{cases} u_n < 0 \iff v_n < 0 \\ u_n = 0 \iff v_n = 0 \\ u_n > 0 \iff v_n > 0 \end{cases} \right]$$

7 - Applications habituelles aux développements limités :

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \text{ ET } g(x) \sim_{x \rightarrow a} h(x) \implies f(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$$

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^p) \implies (x-a)^q f(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^{p+q})$$

$$f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^p) \implies f(\lambda x) = o_{x \rightarrow 0}(x^p) \text{ ET } f(x^q) = o_{x \rightarrow 0}(x^{pq})$$

8 - Exemples de fonctions équivalentes et de suites négligeables :

- un équivalent de $\binom{2n}{n}$, par l'équivalent de Stirling,
- équivalents de $\frac{\sin x}{\tanh x}$ et de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^a}$, par les dérivées en 0 ou a ,
- un équivalent de $(2^x)^{(3^x)}/(3^x)^{(2^x)}$, par le logarithme,
- un équivalent de $\arccos x$ en 1, par construction trigonométrique,
- classement par négligeable : 2^{3n} , 3^{2n} , $2^{(n^2)}$, $2^{(2^n)}$, $(2^n)^2$ et $2^{(n^3)}$.