

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Un développement limité de f à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ est défini par ces équivalences :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0 \quad \text{où } (a_k)_{k=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\iff f(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k = o_{x \rightarrow a}(x-a)^n$$

$$\iff f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}(x-a)^n$$

1 - Unicité du développement limité :

- démonstration par l'absurde, si $E = \{k \mid a_k \neq \widetilde{a}_k\} \neq \emptyset$,

étude de $0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^m} = a_m - \widetilde{a}_m \neq 0$ quand $m = \min E$.

- développements limités de 0 à tout ordre en $a \in \mathbb{R}$,
- développements limités en 0 de $\sqrt{x}$ à l'ordre 0 et de $x^{3/2}$ à l'ordre 1,
- le développement limité de $\sqrt{x}$ en 0 à l'ordre 1 n'existe pas,
- troncature du développement limité à un ordre inférieur.

2 - Opérations sur les développements limités :

- développements limités en a d'une combinaison linéaire,
- produit par $(x-a)^m$, l'ordre du développement en a augmente,
- produit $f(x)g(x)$, troncature du développement produit.

3 - Continuité, dérivation et développements limités :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff f(x) = \ell + o_{x \rightarrow a}(1) = \ell + o_{x \rightarrow a}((x-a)^0)$,
- f est dérivable en $a \iff f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^1)$,
- $h'(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \implies h(x) - h(a) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$,

à démontrer par le théorème des accroissements finis,

- $g'(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}(x-a)^n$

$$\implies g(x) = g(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o_{x \rightarrow a}(x-a)^{n+1}.$$

4 - Formule de Taylor-Young des applications n fois dérivables en a :

- $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}(x-a)^n$
- démonstration par récurrence sur n , à partir de $f^{(n-1)}$ est dérivable en a et donc possède un développement limité à l'ordre 1 en a ,
- la condition de dérivation n'est pas nécessaire aux ordres $n \geq 2$: $x^5 \sin(1/x^4)$ à un développement à l'ordre 4 en 0 et pas de classe $\mathcal{C}^1$,

5 - Développements limités usuels en 0 :

- $1/(1 \pm x)$ par produit remarquable,
- $\ln(1 \pm x)$ par primitive,
- $\exp(\pm x) = e^{\pm x}$ par Taylor-Young,
- $\sinh x$ et $\cosh x$ par demi-somme et demi-différence,
- $\sin x$ et $\cos x$ par Taylor-Young,
- $\tan x$ et $\tanh x$ par produit, composition et $\tanh x = -i \tan(ix)$,
- $\arctan x$ et $\arcsin x$ à partir de leur dérivée.

6 - Exemples de développements limités :

- développement limité de $\frac{\cosh x + \cos x - 2}{x^4}$ à l'ordre 2 en 0,
- développements limités à l'ordre 3 en 0 :

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \quad \frac{2}{\sin(2x)} - \frac{1}{\sin x}$$

- développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\sqrt{\sqrt{1+x^4}-1}$,

7 - Application aux limites et équivalents :

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{b/x} = e^{ab}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+1/n)^n = e$,
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan(2x)} = 1/e$,
- équivalents de $\ln(\sin(3x))$, $\ln(2 \sin x)$ et $\ln(2 \cos(2x))$ en $\pi/6$.

8 - Développement limité de l'application réciproque de $f(x) = x + x^3$:

- L'application f est bijective d'application réciproque $g = f^{-1}$,
- l'application g est continue et dérivable, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$,
- est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc a un développement limité en 0,
- calcul du développement limité de g à l'ordre 7 en 0, par $(g \circ f)(x) = x$ et identification des coefficients.