ESPACES VECTORIELS

1 - Définition des espaces vectoriels et premières propriétés :

• La structure $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ à ces conditions :
$(E,+)$ est un groupe commutatif d'élément neutre noté $\mathbf{0}_E$
$\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 \quad \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in E^2 \qquad (\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{u}=(\lambda\cdot\boldsymbol{u})+(\mu\cdot\boldsymbol{u})$
$\lambda\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=(\lambda\cdot\boldsymbol{u})+(\lambda\cdot\boldsymbol{v}) \quad (\lambda\times\mu)\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{u}) \quad 1\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

• Un espace vectoriel est un groupe commutatif $(E,+)$:
$\mathbf{0}_E=-\mathbf{0}_E \qquad -(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u} \qquad -(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$

• $\lambda\boldsymbol{u}\iff\lambda=0 \textsf{ OU } \boldsymbol{u}=\mathbf{0}_E$ et $-(\lambda\boldsymbol{u})=(-\lambda)\boldsymbol{u}=\lambda\cdot(-\boldsymbol{u})$

2 - Espaces vectoriels de référence :

• $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel pour les lois coordonnée par coordonnée,

• $\mathbb{K}=\mathbb{K}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,
$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\{\mathbf{0}\}$ et $\mathbb{K}^0$ est l'espace vectoriel nul,

• E^X est un espace vectoriel pour les opérations sur $X\to E$,
le vecteur nul est l'application nulle : $0_{X\to E}: x\mapsto\mathbf{0}_E$,

• démonstration par le lemme $(G^X,\widetilde{\star})$ est un groupe pour la loi $\widetilde{\star}$ définie par $(g\widetilde{\star}f)(x)=g(x)\star f(x)$ quand $(G,\star)$ est un groupe.

3 - Caractérisation des sous-espaces vectoriels :

• Un sous-espace vectoriel F est un sous-ensemble de l'espace E qui a une structure d'espace vectoriel pour les restrictions des lois à F :
F est stable par somme et par produit, $\quad \mathbf{0}_E\in F$

• les trois propositions suivantes sont équivalentes :
F est un sous-espace vectoriel de E
$F\subset E \textsf{ ET } \mathbf{0}_E\in F \textsf{ ET } F$ est stable par $+$ $\textsf{ET}$ F est stable par $\cdot$
$F\subset E \textsf{ ET } F\neq\emptyset \textsf{ ET } \big(\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in F^2\ \lambda\,\boldsymbol{u}+\mu\,\boldsymbol{v}\in F\big)$

• conséquence : l'intersection de sous-espaces est un sous-espace, preuve pour deux sous-espaces et une famille de sous-espaces.

4 - Sous-espaces vectoriels engendrés :

• Vect X est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X :
$$\operatorname{Vect} X=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{x}_k \;\Big/\; n\in\mathbb{N} \textsf{ ET } (\lambda_k)_{k=1}^n\in\mathbb{K}^n \textsf{ ET } (\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^n\in X^n\right\}$$
$X\subset\operatorname{Vect} X \quad \operatorname{Vect}(\emptyset)=\operatorname{Vect}(\mathbf{0}_E)=\{\mathbf{0}_E\} \quad \operatorname{Vect}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\mathbb{K}\boldsymbol{u}+\mathbb{K}\boldsymbol{v}$

• Vect X est un sous-espace vectoriel,

• $X\subset Y\Longrightarrow\operatorname{Vect}X\subset\operatorname{Vect}Y$, $\operatorname{Vect}X=X\iff X$ est un sev,

• Vect X est le plus petit sous-espace contenant X,
$\operatorname{Vect}X=\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F$, où $\mathcal{F}=\big\{F\subset E \;\big/\; F \text{ est un sev } \textsf{ET } X\subset F\big\}$.

5 - Somme et somme directe de sous-espaces :

• définition de la somme de sous-espaces, notée $F+G$,

• la somme de sous-espaces est un sous-espace,

• la somme de plusieurs sous-espace est directe, et notée $F\oplus G\oplus H$,
si et seulement si la décomposition de tout vecteur est unique,
si et seulement si la décomposition du vecteur nul est unique :
$\forall\,\boldsymbol{x}\in F+G+H \quad \exists!\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in F\times G\times H \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$
$\forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in F\times G\times H \quad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\mathbf{0}_E\Longrightarrow \quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}=\mathbf{0}_E$

• F et G sont supplémentaires si et seulement si $E=F\oplus G$,
si et seulement si $F+G=E$ et $F\cap G=\{\mathbf{0}_E\}$,

6 - Deux représentations des sous-espaces de coordonnées :
Le sous-ensemble F de $E=\mathbb{R}^3$ est défini ainsi, et $G=\operatorname{Vect}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$:
$$F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\Big/\; \begin{array}{r}x+y+z=0\\ \textsf{ET }x-y+z=0\end{array}\right\} \quad \boldsymbol{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

• calculer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ de façon à ce que $F=\mathbb{R}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$,

• calculer (a,b,c) pour que $G=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\Big/\; ax+by+cz=0\right\}$,

• exprimer $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$ comme des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$,

• en déduire la relation $E=F\oplus G$.

7 - Exemples de sous-espaces d'applications :

• vérifier que $E=\mathcal{C}^1(\mathbb{R},R)$ est un espace vectoriel,
les sous-ensembles F, G et H de E sont définis ainsi :
$$F=\big\{f\in E \;\big/\; f(0)=f'(0)=0\big\} \quad G=\big\{f\in E \;\big/\; f(0)=f(1)=0\big\}$$
$$H=\big\{x\mapsto ax+b \;\big/\; (a,b)\in\mathbb{R}^2\big\}$$

• démontrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels,

• vérifier les égalités $F\oplus H=E$ et $G\oplus H=E$.