ESPACES VECTORIELS et applications linaires **- II**

1 - Définitions et premières propriétés des applications linéaires :

• Une application f d'un espace E dans un espace F sur le même corps $\mathbb{K}$ est linéaire à cette condition :

$$\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 \quad \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in E^2 \quad f(\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{u}) + \mu f(\boldsymbol{v}),$$

• conséquences : $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$ et $f(-\boldsymbol{u}) = -f(\boldsymbol{u})$,

• définitions : endomorphismes, isomorphismes et automorphismes,

• la composée de deux applications linéaires est linéaire,

• l'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme,

• l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

2 - Sous-espaces caractéristiques des applications linéaires :

• L'image directe d'un sev par une application linéaire est un sev, l'image réciproque d'un sev par une application linéaire est un sev,

• $\ker f = \big\{\boldsymbol{u} \;\big/\; f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F\big\}$ est un sous-espace,

• théorème du noyau : f est injective $\Longleftrightarrow \ker f = \{\mathbf{0}_E\}$,

• $\operatorname{Im} f = f(E)$ et f est surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

3 - Exemples d'applications linéaires :

• dans $\mathbb{K}^n$ les combinaisons linéaires de coordonnées sont linéaires,

• $F = \ker\varphi$ où $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire, donc F est un sous-espace :

$$F = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \;\Big/\; \text{ET}\; \begin{matrix} x+2y=0\\ y-3z=0\end{matrix}\right\} \qquad \varphi : \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y\\ y-3z\end{pmatrix}$$

• dans $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{llll} \varphi_u : E \longrightarrow \mathbb{R} & \delta : E \longrightarrow E & \psi_a : E \longrightarrow E & \text{où } E = \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}),\\ \quad f \longmapsto f(u) & \quad f \longmapsto f' & \quad f \longmapsto af & u\in I \text{ et } a\in E. \end{array}$$

• l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène est un sev : par exemple $\mathcal{S} = \ker\varphi$ quand l'application linéaire $\varphi = \delta\circ\delta - \psi_a\circ\delta - \psi_b$ sur E pour $y'' = a(t)\,y' + b(t)\,y$.

4 - L'ensemble des endomorphismes $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$:

• le groupe $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ des automorphismes,

$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ et $(\lambda f)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\, f^{-1}$ quand $\lambda \neq 0$,

• le sous-espace propre $E_\lambda(f) = \big\{\boldsymbol{u} \;\big/\; f(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}\big\} = \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$,

5 - Manipulations des noyaux et de images d'applications linéaires :

• $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$ $\quad \operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$

où $(f,g)\in\mathcal{L}(E,F)^2$,

• $\ker f \subset \ker(g\circ f)$ $\quad \operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g$

$g\circ f = 0_{E\to G} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker g$ où $f : E \to F$ et $g : F \to G$,

$\ker(g\circ f) = \ker f \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{\mathbf{0}_F\}$

$\operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im} g \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f + \ker g = F$

par la décomposition $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) = (g\circ f)(\boldsymbol{u})$ et $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} - f(\boldsymbol{u})) + f(\boldsymbol{u})$,

6 - Étude des projections :

• Une projection $p\in\mathcal{L}(E)$ est caractérisée par $p\circ p = p$,

• toute projection vérifie $\operatorname{Im} p = E_1(p)$ et $\operatorname{Im} p \oplus \ker p = E$,

• si $F \oplus G = E$ alors il existe une unique projection p sur F de direction G : $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \ker p$,

7 - Familles libres :

• Une famille de vecteurs $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ de E est libre :

$$\forall\,(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Une famille liée est une famille qui n'est pas libre,

• preuve qu'une famille de vecteurs-coordonnées est libre ou liée :

$$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ est libre, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ est liée, par résolution de systèmes,

• démonstration qu'une famille d'applications est libre ou liée,

$$\mathcal{L} = (x \mapsto \cos(kx))_{k=0}^{3} \qquad \mathcal{M} = (x \mapsto \cos(x + k\pi/6))_{k=0}^{3}$$

$\mathcal{L}$ est libre, $\mathcal{M}$ est liée, en prenant des valeurs particulière de x,

8 - Familles génératrices :

• Une famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n} \in E^n$ est génératrice ssi $\operatorname{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n} = E$,

• la famille $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$,

la famille $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.