ESPACES DE DIMENSION FINIE

Définition des espaces vectoriels de dimension finie :

• *Un espace est de dimension finie s'il a une famille génératrice finie.*

1 - Le théorème des familles génératrices et des familles liées :
• si $E = \text{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$, $\mathcal{F} = \text{Vect}\,(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^p \in E^p$ et $p > n$ alors $\mathcal{F}$ est liée,
• démonstration par récurrence sur n, étude des cas $n \in \{1, 2, 3\}$.

2 - Théorèmes des familles libres maximales et de la base incomplète :
• Soit E est un espace de dimension finie,

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathcal{F} \;\middle/\; \text{la famille } \mathcal{F} \text{ est libre} \right\} \quad \mathcal{N} = \left\{ \text{card } \mathcal{F} \;\middle/\; \mathcal{F} \in \mathcal{S} \right\}$$

$n = \max \mathcal{N} \in \mathbb{N}$ est bien défini,
toute famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ avec n éléments est une base de E,
• tout vecteur $\boldsymbol{v}$ ajouté une telle famille de $\mathcal{F}$ rend celle-ci liée,
Par l'absurde $\boldsymbol{v}$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ et $\text{Vect}\,\mathcal{F} = E$.
• cas du théorème de la base incomplète :
la famille $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{G}$ est génératrice,

$$\mathcal{S}' = \left\{ \mathcal{F}' \;\middle/\; \text{la famille } \mathcal{F}' \text{ est libre ET } \mathcal{L} \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{G} \right\}$$

$$\mathcal{N}' = \left\{ \text{card } \mathcal{F}' \;\middle/\; \mathcal{F}' \in \mathcal{S}' \right\} \qquad n = \max \mathcal{N} \in \mathbb{N}$$

• toute famille $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{S}'$ avec n éléments est une base de E,
• tout espace vectoriel de dimension finie possède une base,
• $\mathcal{L} = ()$ est libre, et $E = \text{Vect}\, E$ est génératrice de E.

3 - Propriétés élémentaires des bases des espaces de dimension finie :
• Toutes les bases ont le même nombre de vecteurs, appelé $\dim E \in \mathbb{N}$,
• $\mathbb{K}^n$ est un espace de dimension finie, $\dim \mathbb{K}^n = n$,
• $\dim E = 0 \iff E = \{\mathbf{0}\}$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$,
• dans un espace E tel que $\dim E = n$:
les familles libres ont au maximum n éléments.
les familles libres ayant n éléments sont des bases,
les familles génératrices ont au minimum n éléments,
les familles génératrices ayant n éléments sont des bases,
• illustration sur une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

4 - Espaces vectoriels produits : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$,

• Construction d'une base de $E \times F$.

5 - Sous-espaces vectoriels F et G de E :
• $\dim F \leq \dim E$ et $\dim F = \dim E \iff F = E$,
• $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$ par concaténation des bases,
• $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$ à partir de $H = F \cap G$,

6 - Théorème du rang d'une application linéaire :
• $\text{rg}\, f + \dim(\ker f) = \dim E$ quand $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\text{rg}\, f = \dim(\text{Im}\, f)$,
• démonstration en prenant une base $\text{Im}\, f$ et une de $\ker f$,

7 - Propriété des automorphismes en dimension finie :
• f est injective $\iff$ f est surjective $\iff$ f est bijective
$\iff$ l'image d'une base est une base

8 - Exemples de dimension :
• $|\,\text{rg}\, f - \text{rg}\, g| \leq rg(f + g) \leq \text{rg}\, f + \text{rg}\, g$,
• par le théorème du rang sur une restriction :

$$\dim g(G) = \text{rg}\, g_{/G} \qquad \ker g_{/G} = \ker g \cap G$$

• $\text{rg}\, f + \text{rg}\, g - \dim E \leq rg(g \circ f) \leq \min(rgf, \text{rg}\, g)$, avec $G = \text{Im}\, f$.

9 - Définition d'une application linéaire par l'image d'une base :
• L'application $\psi : \mathcal{L}(E, F) \to F^n$ définie par $\psi(f) = f(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une base de E de dimension $n = \dim E$. est un isomorphisme.
• $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$.

10 - Base et dimension d'un sous-espace de $\mathbb{K}^n$.
• exemple de base de $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle/\; \sum_{i=1} x_i = 0 \right\}$.
• preuve de $\text{Im}\, f = F = \text{Vect}(C_1, C_2) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$, et construction de bases de $\text{Im}\, f$ et de $\ker f$, $C_i = f(E_i)$ où (E_1, E_2, E_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + z \\ -4x + 3y + 10z \\ x - y - 3z \end{pmatrix} \qquad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle/\; x - y - 3z = 0 \right\}$$