MATRICES

1 - Définition et premières propriétés des matrices :
• l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel,
la matrice nulle $(0)_{n,p}$ a tous ses coefficients nuls.
• la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $(E_{u,v})_{\substack{1\le u\le n\\1\le v\le p}}$ où $E_{u,v}=(\delta_{u,i}\,\delta_{v,j})$,
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie : $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})=np$,
• définitions des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
des matrices-lignes $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})=\mathbb{K}^n$,
• définition et formulaire sur le produit matriciel,
définie par déplacement sur les lignes et les colonnes,
et par formule explicite de somme des produits des coefficients,
matrice carrée unité $\mathbb{1}_n=(\delta_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
• le produit matriciel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif pour $n\ge 2$,
le produit matriciel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas intègre pour $n\ge 2$:

• autres opérations linéaires, transposée et trace :

$$^{\mathrm{t}}(AB)={}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A \qquad {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A)=A \qquad \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$$

2 - Sous-espaces des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
• les matrices diagonales $\mathcal{D}$:

$$M=(m_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{D}\iff\big(\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad i\neq j\Longrightarrow m_{i,j}=0\big)$$

$$\dim\mathcal{D}=n\qquad\forall\,(D,D')\in\mathcal{D}^2\quad D\,D'=D'\,D$$

une base de $\mathcal{D}$ est $(E_{u,u})_{1\le u\le n}$,
le produit des matrices diagonales commute,
• les matrices triangulaires inférieures $\mathcal{L}$ et supérieures $\mathcal{R}$:

$$M\in\mathcal{L}\iff\big(\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad i<j\Longrightarrow m_{i,j}=0\big)$$

$$M\in\mathcal{R}\iff\big(\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad i>j\Longrightarrow m_{i,j}=0\big)$$

$$\mathcal{L}\cap\mathcal{R}=\mathcal{D}\qquad\mathcal{L}+\mathcal{R}=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\qquad\dim\mathcal{L}=\dim\mathcal{R}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$^{\mathrm{t}}\mathcal{L}=\mathcal{R}\qquad{}^{\mathrm{t}}\mathcal{R}=\mathcal{L}\qquad\forall\,(L,L')\in\mathcal{L}^2\quad L\,L'\in\mathcal{L}$$

deux bases de ces sous-espaces sont $(E_{u,v})_{u,v}$ où $u\le v$ ou $u\ge v$,
les produits sont stables par $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$,
• les matrices symétriques $\mathcal{S}$ et antisymétriques $\mathcal{A}$ réelles :

$$\mathcal{S}\oplus\mathcal{A}=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\qquad\dim\mathcal{S}=\frac{n(n+1)}{2}\qquad\dim\mathcal{A}=\frac{n(n-1)}{2}$$

deux bases des sous-espaces sont $(E_{u,v}\pm E_{v,u})_{u,v}$ où $u\le v$ ou $u<v$,

3 - Matrices et applications linéaires :
• une fois fixée les bases $\mathcal{B}_E=(\boldsymbol{u}_j)_{j=1}^p$ et $\mathcal{B}_F=(\boldsymbol{v}_i)_{i=1}^n$ des espaces E et F, la matrice $A=(a_{i,j})_{i,j}=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de l'application linéaire $f\in\mathcal{L}(E,F)$ est colonne par colonne les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ écrites dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n}\\\vdots&&\vdots\\a_{p,1}&\cdots&a_{p,n}\end{pmatrix}\qquad\forall\,j\in[\![1,n]\!]\quad f(\boldsymbol{u}_j)=\sum_{i=1}^n a_{i,j}\,\boldsymbol{v}_i$$

• coordonnées des images d'un vecteur par une application linéaire :

$$X\in\mathbb{K}^n\qquad Y\in\mathbb{K}^p\qquad A=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

$$\boldsymbol{u}=\sum_{j=1}^n x_j\,\boldsymbol{u}_j\qquad f(\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^p y_i\,\boldsymbol{v}_i\qquad Y=AX$$

• matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires :

$$A=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\qquad B=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)$$

$$\mathrm{mat}(\lambda f+\mu g,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)=\lambda A+\mu B$$

• matrice d'une composition d'applications linéaires :

$$A=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)\qquad B=\mathrm{mat}(g,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)\qquad\mathrm{mat}(g\circ f)=BA$$

4 - Exemples de matrices d'applications linéaires :
• cas des espaces de coordonnées, à partir des bases canoniques :
bases canoniques $\mathcal{B}c=(E_1,E_2,E_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}c'=(E'_1,E'_2)$ de $\mathbb{R}^2$

$$f:\quad\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x+2y+3z\\x-z\end{pmatrix}\qquad\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}c,\mathcal{B}c')=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

• cas des espaces de coordonnées, à partir de bases quelconques :

$$F_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ F_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ F_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad G_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ G_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\ \begin{array}{l}\mathcal{B}=(F_1,F_2,F_3)\\ \mathcal{B}'=(G_1,G_2)\end{array}$$

$$f(F_1)=G_1+2G_2\qquad f(F_2)=2G_1+3G_2\qquad f(F_1)=3G_1+3G_2$$

$$\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}\qquad \mathrm{mat}(f,\mathcal{B}c,\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}c')=\begin{pmatrix}3&5&6\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

• cas des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, à partir de la base cononique :

$$\mathcal{B}c=(1,X,\cdots,X^n)\qquad \delta:P\mapsto P'\qquad t_a:P(X)\mapsto P(X+a)$$

$$\mathrm{mat}(\delta,\mathcal{B}c,\mathcal{B}c)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&0&n\\0&\dots&\dots&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

$A=(a_{i,j})_{i,j}=\mathrm{mat}(t_a,\mathcal{B}c,\mathcal{B}c)\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure

$$t_a(X^{j-1})=(X+a)^{j-1}\qquad a_{i,j}=\begin{cases}\binom{j-1}{i-1}a^{j-i} & \text{quand } i\le j\\ 0 & \text{quand } i>j\end{cases}$$

5 - Les matrices d'endomorphismes :

• Une fois fixée une base $\mathcal{B}$ de E, l'application $\mathrm{mat}(\bullet,\mathcal{B},\mathcal{B})$ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall\,(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2\quad \mathrm{mat}(f+g,\mathcal{B},\mathcal{B})=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})+\mathrm{mat}(g,\mathcal{B},\mathcal{B})$$

et donc $\mathrm{mat}(0_{E\to E},\mathcal{B},\mathcal{B})=(0)_n$

$$\forall\,\lambda\in\mathbb{K}\quad\forall\,f\in\mathcal{L}(E)\quad \mathrm{mat}(\lambda f,\mathcal{B},\mathcal{B})=\lambda\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$$

$$\forall\,(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2\quad \mathrm{mat}(g\circ f,\mathcal{B},\mathcal{B})=\mathrm{mat}(g,\mathcal{B},\mathcal{B})\cdot\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$$

$$\mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E,\mathcal{B},\mathcal{B})=\mathbb{1}_n$$

• $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si

$$\exists\,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\quad AB=\mathbb{1}_n\ \textsf{ET}\ BA=\mathbb{1}_n\iff\exists\,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\quad AB=\mathbb{1}_n$$
$$\iff\exists\,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\quad BA=\mathbb{1}_n$$

l'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$,

• $f\in\mathcal{GL}(E)\iff\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$,

et dans ce cas $\mathrm{mat}(f^{-1},\mathcal{B},\mathcal{B})=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})^{-1}$,

6 - Matrices et changement de bases :

• la matrice de changement de base $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est colonne par colonne les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ écrites dans la base $\mathcal{B}$:

$$P=\begin{pmatrix}p_{1,1}&\cdots&p_{1,n}\\\vdots&&\vdots\\p_{n,1}&\cdots&p_{n,n}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{u}'_j=\sum_{i=1}^n p_{i,j}\,\boldsymbol{u}_j$$

$$\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^n x_i\,\boldsymbol{u}_i=\sum_{i=1}^n x'_i\,\boldsymbol{u}'_i\qquad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}X'=X$$

• $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=\mathrm{mat}(\mathrm{Id}_E,\mathcal{B}',\mathcal{B})\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\qquad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}}=\mathbb{1}_n$

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}\qquad P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

• $A=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})\qquad A'=\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}')\qquad A'=P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\,A\,P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$

7 - Calcul de la matrice inverse par une matrice de changement de bases :

• $$A=\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1&0\\\vdots&&\ddots&1&1\\0&\dots&\dots&0&1\end{pmatrix}=[C_1,C_2,\cdots,C_n]\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

vérifier que $\mathcal{B}=(C_1,\cdots,C_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$,
exprimer $E_k=C_k-C_{k-1}+C_{k-2}\cdots+(-1)^{k-1}C_1$
où $\mathcal{B}c=(E_1,\cdots,E_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$A=P_{bc\to\mathcal{B}}\ \text{et}\ A^{-1}=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}c}=\begin{pmatrix}1&-1&1&\cdots&(-1)^{n-1}\\0&1&-1&&(-1)^{n-2}\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&1&-1\\0&\dots&\dots&0&1\end{pmatrix}$$