# LES POLYNÔMES

1 - Construction de l'algèbre des polynômes par les suites à support fini :
• l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, le sous-espace des suites à support fini,
• la multiplication sur ces suites à support fini,
la structure d'algèbre commutative,
• la notation $X = (0, 1, 0, \cdots)$ et $\mathbb{K}[X]$,
les définitions du degré et de la valuation.

2 - Comparaison des structures d'algèbre $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{L}(E)$ :
• l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est commutatif,
l'anneau $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif, par exemple pour $E = \mathbb{R}^2$,
• l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre, par un argument de degré,
l'anneau $\mathcal{L}(E)$ n'est pas intègre, par exemple pour $E = \mathbb{R}^2$,
• les éléments inversibles sont $\mathbb{U}(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K}^* X^0$ et $\mathbb{U}(\mathcal{L}(E)) = \mathcal{GL}(E)$.

3 - Construction de l'arithmétique des polynômes :
• de façon analogue avec l'arithmétique des entiers,
• division euclidienne, divisibilité,
• lemme d'Euclide, algorithme d'Euclide,
définition du pgcd à une constante multiplicative près,
• propriété fondamentale du pgcd, conséquences,
• équation de Bezout, théorèmes de Bezout et de Gauss,
• ppcm : définition et propriété fondamentale.

4 - Généralisation des familles finies aux familles quelconques :
• une combinaison linéaire d'une famille quelconque $X$ est $\operatorname{Vect} X$,
toute combinaison linéaire comporte un nombre fini de termes,
• $X$ est génératrice de $E$ si et seulement si $\operatorname{Vect} X = E$,
• $X$ est libre si et seulement si toute sous-famille finie de $X$ est libre,
• $X$ est liée si et seulement si il existe une sous-famille finie liée,
• une base de $E$ reste une famille libre et génératrice de $E$.
• par exemple l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X] = \operatorname{Vect} \left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$,
$\operatorname{Vect} \left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$,
l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

5 - Propriétés usuelles de l'espace vectoriel des polynômes :

• les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie,
de base $(1, X, \cdots, X^n)$ et de dimension $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

• la dérivation est une application linéaire sur $\mathbb{K}[X]$, non injective et surjective, l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie :

$$\begin{array}{rcl} \delta : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \ker \delta = \mathbb{K}X^0 \\ \operatorname{Im} \delta = \mathbb{K}[X] \end{array} \qquad \operatorname{Im}(\delta_{/\mathbb{K}_n[X]}) = \mathbb{K}_{n-1}(X)$$

6 - Exemples de bases de $\mathbb{K}_n[X]$ :

$(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est la base canonique,

$(1, X - a, (X - a)^2, \cdots, (X - a)^n)$, base de la formule de Taylor,

$((X - a)^k (X - b)^{n-k})$ est une base de degré $n$,

• une famille $(P_k)_{k=0}^n$ de polynômes de degré échelonnés, $\deg P_k = k$, est libre, puis par un argument de dimension une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

7 - Polynômes d'interpolation de Lagrange :

• les polynômes d'interpolation de la famille $(a_i)_{i=0}^n$ différents sont :

$$P_k = \frac{\prod\limits_{\substack{0 \le i \le n \\ i \ne k}} (X - a_i)}{\prod\limits_{\substack{0 \le i \le n \\ i \ne k}} (a_k - a_i)} \in \mathbb{R}_n[X] \qquad a_i \ne a_j \qquad P_i(a_j) = \delta_{i,j}$$

• la famille $(P_k)_{k=0}^n$ de $n$+1 polynômes est libre et une base de $\mathbb{K}_n[X]$,

• l'application $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n[X]$ est un isomorphisme :

$$\mathcal{L}\,(b_k)_{k=0}^n = \sum_{k=0}^n b_k\, P_k$$

• il existe un unique $Q = \mathcal{L}\,(b_k)_{k=0}^n \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $Q(a_k) = b_k$.

8 - La dérivation discrète : $P_k = \prod\limits_{i=0}^{k-1} (X - i) \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$

• $(1, X, X(X-1), \cdots, X(X-1)(X-n+1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \qquad \Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$$

• $\Delta(P_k) = k\, P_{k-1}$ par factorisation partielle,
$\Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \Delta \operatorname{Vect}(P_k)_{k=0}^n = \operatorname{Vect}(\Delta(P_k))_{k=0}^n = \operatorname{Vect}(k\, P_k)_{k=0}^n = \operatorname{Vect}(k\, P_k)_{k=1}^n = \operatorname{Vect}(P_k)_{k=1}^n$