APPLICATIONS DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE

1 - Opérations élémentaires sur les colonnes de $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
$\star$ multiplication d'une colonne par une constante $\lambda\in\mathbb{K}^*$,
$\star$ échange de deux colonnes,
$\star$ ajout d'une combinaison des autres colonnes à une colonne donnée,
• ces opérations consistent à effectuer un produit $A' = AP$,
• opérations similaires sur les lignes, de la forme QA,
• préciser les matrices P et Q dans les trois cas, P^{-1} et $\det P$.

2 - Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss :
Par opération sur les lignes de A,
pour obtenir les unes à la suite des autres les colonnes de $\mathbb{1}_n$.
appliquer la même transformation à $\mathbb{1}_n$ donne la matrice identité.
• justification par des produits de transformations élémentaires :
$\mathbb{1} = Q_N \cdots Q_1 \mathbb{A}$ donc $A^{-1} = Q_N \cdots Q_1 \mathbb{1}$,
• inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 5 & -27 & -6 & 4 \\ -4 & 23 & 5 & -4 \\ -5 & 27 & 6 & -5 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 - Rang d'une matrice $A = [C_1, \cdots, C_p]\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
rang des vecteur colonne ou d'une application linéaire de matrice A.
• démonstration de $\dim f(F) = \dim F$ quand F est un isomorphisme, par le théorème du rang, et applications aux coordonnées de $\operatorname{Im} f$.
• démonstration des coordonnées de $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(C_1, \cdots, C_p)$,
• le rang ne change pas par le produit par une matrice inversible :
$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(AP) = \operatorname{rg}(QA)$ quand $P\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

4 - Calcul du rang d'une matrice :
• rang d'une matrice triangulaire R,
Si $r_{i,i} \neq 0$ si $1 \leq i \leq r$ et $r_{i,j} = 0$ si $\min(j, r) < i$, alors $\operatorname{rg} R = r$,
• démonstration par l'égalité $\operatorname{Vect}(C_1, \cdots, C_n) = \operatorname{Vect}(E_1, \cdots, E_r)$, où E_k représente r vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
• application à la matrice $A = (i + j)_{i,j}$, $\operatorname{rg} A = 2$.

5 - Théorème des matrices équivalentes :

• deux matrices sont de même rang $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ si et seulement si elles sont équivalentes $B = PAQ$ où P et Q sont des matrices inversibles,
• en montrant que $\operatorname{rg} A = r$ entraîne que A et I_r sont équivalentes où $I_r = (i_{i,j})_{i,j}$ vérifie $i_{i,j} = 1$ uniquement si $i = j \leq r$ et 0 sinon.
• par la construction d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^p$ et d'une de $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ à partir d'une base de $\operatorname{Im} f$ où $f : X \mapsto AX$, de $\ker f$, et des antécédents de celle de $\operatorname{Im} f$. $I_r = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ quand $A = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}c, \mathcal{B}c')$.
• conséquence $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}({}^{\mathrm{t}}A)$.

6 - Matrices semblables, déterminant et trace d'un endomorphisme :
• $\det f = \det A = \det A'$ où $A = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ et $A' = \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$, $\det(MN) = \det M \, \det N$ sur les matrices carrées,
• $\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$, par $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$,
• pour une projection p, $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p$ par le choix des bases,

7 - Comatrice $M = ((-1)^{i+j} \det(\widetilde{A_{i,j}}))$ des cofacteurs :
• ${}^{\mathrm{t}}M\, A = A\, {}^{\mathrm{t}}M = \det(A)\, \mathbb{1}_n$,
• par développement d'une ligne ou d'une colonne d'un déterminant,
• calcul de A^{-1} à l'ordre $n = 2$, et éventuellement 3,

8 - Système linéaire :
• résoudre un système linéaire consiste à résoudre une équation matricielle $AX = b$ où $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X\in\mathbb{K}^p$ et $b\in\mathbb{K}^n$,
• résoudre $AX = \mathbf{0}$ est une recherche de noyau,
• résoudre $AX = b$ est soit sans solution, soit de la forme $X_0 + \mathcal{H}$ où X_0 est une solution particulière $AX_0 = b$ et $\mathcal{H}$ est le noyau des solutions de $AX = \mathbf{0}$,
• applications aux systèmes carrées, et de déterminant non nul,
• méthode de Cramer $x_k = \dfrac{\det[C_1 \cdots, C_{k-1}, b, C_{k+1} \cdots, C_n]}{\det A}$
où $A = [C_1, \cdots, C_n]\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, application à l'ordre 2 et 3.

9 - Présentation du calcul matriciel par blocs pour sommes et produits.