ESPACES EUCLIDIENS

1 - Les normes :
- définition et exemples de normes $||\bullet||_1$, $||\bullet||_2$ et $||\bullet||_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$.
- représentation de ces boules fermées centrées à l'origine, inclusions des boules.

2 - Formes bilinéaires, formes quadratiques :
- l'espace vectoriel des formes bilinéaires $\mathcal{L}_2(E,\mathbb{K})$,
- base de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et dimension $\dim \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = n^2$,
- le sous-espace des formes bilinéaires symétriques,
- définition des formes quadratiques,
cas des formes quadratiques positives et de celles définies positives,
- formules de polarisation :

$$f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{q(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-q(\boldsymbol{u})-q(\boldsymbol{v})}{2} = \frac{q(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-q(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})}{4}$$

- forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de la forme quadratique :

$$x_i^2 \to x_i y_i \qquad x_i x_j \to \frac{x_i y_j + x_j y_i}{2}$$

3 - Exemples de formes quadratiques :
- forme définie positive sur $\mathbb{R}^2$: $q(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$,
- forme sur $\mathbb{R}[X]$: $q(P) = (P(1)+P'(0))(P(2)-P''(0))$,
- forme définie positive sur $\mathcal{C}([0,\,\pi],\mathbb{R})$: $q(f) = \displaystyle\int_0^\pi \sin t\, f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique définie positive sur un espace de corps de base $\mathbb{R}$.

4 - Exemples de produits scalaires :
- Sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire canonique est $\langle U\,|\,V\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k v_k$,
- sur $\mathcal{C}([0,\,1],\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel est $\langle f\,|\,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.

5 - Orthognalité :
- définition des vecteurs orthogonaux $\boldsymbol{u}^\perp$ de $\boldsymbol{u} \in E$, et des sous-ensembles orthogonaux $X^\perp$ de $X \subset E$.

- $\mathbf{0}^\perp = E$, $E^\perp = \{\mathbf{0}_E\}$, $(\lambda\boldsymbol{u})^\perp = \boldsymbol{u}^\perp$, $X \subset Y \Longrightarrow Y^\perp \subset X^\perp$,
- $X^\perp$ est un sev, $X^\perp = \mathrm{Vect}\, X^\perp$, $F \subset F^\perp = \{\mathbf{0}_E\}$ si F sev de E,
- définitions des familles orthogonales et orthonormales,
- toute famille orthonormale est libre.

Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.

6 - Coordonnées dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\cdots,\boldsymbol{u}_n)$:
- $\boldsymbol{v} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \langle \boldsymbol{u}_k\,|\,\boldsymbol{v}\rangle\, \boldsymbol{u}_k$ et $\langle \boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{w}\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^n \langle \boldsymbol{u}_k\,|\,\boldsymbol{v}\rangle\,\langle \boldsymbol{u}_k\,|\,\boldsymbol{w}\rangle$.

7 - Méthode de Schmidt :
d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)$ à une bon $\mathcal{B}_{on} = (\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n)$:
- par récurrence $\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{\boldsymbol{u}_1}{||\boldsymbol{u}_1||}$,
- $\boldsymbol{v}_{m+1} = u_{m+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^m \alpha_i\,\boldsymbol{w}_i$ où $\alpha_i = \langle \boldsymbol{u}_{m+1}\,|\,\boldsymbol{w}_i\rangle$ et $\langle \boldsymbol{v}_{m+1}\,|\,\boldsymbol{w}_i\rangle = 0$,
- enfin $\boldsymbol{v}_{m+1} \neq \mathbf{0}_E$, $\boldsymbol{w}_{m+1} = \dfrac{\boldsymbol{v}_{m+1}}{||\boldsymbol{v}_{m+1}||}$ et $(\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_{m+1})$ famille on.
- base de Schmidt issue de $\mathcal{B}c$ de $\mathbb{R}^2$ pour $||(x,y)|| = \sqrt{x^2-2xy+2y^2}$.

8 - Sous-espaces orthogonaux de $F = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$ bon de F :
- $\begin{array}{l}\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \quad \boldsymbol{u} \longmapsto (\langle \boldsymbol{u}_k\,|\,\boldsymbol{u}\rangle)_{k=1}^m\end{array}$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}^m$, $\ker\varphi = F^\perp$ et $F^\perp \cap F = \{\mathbf{0}_E\}$,

par le théorème du rang $\dim F^\perp = \dim E - \mathrm{rg}\,\varphi$,
- donc $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$, $F \oplus F^\perp = E$ et ${F^\perp}^\perp = F$.

9 - Projections orthogonales sur le sev F :
- La projection p est orthogonale si et seulement si $\ker p = \mathrm{Im}\, p^\perp$,
- Si $\mathcal{B}_{on} = (\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)$ est une base orthonormale de F alors

$p(\boldsymbol{u}) = \displaystyle\sum_{k=1}^m \langle \boldsymbol{v}_k\,|\,\boldsymbol{u}\rangle\,\boldsymbol{v}_k \in F$ et $\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u}) \in F^\perp = {\boldsymbol{v}_1}^\perp \cap \cdots \cap {\boldsymbol{v}_m}^\perp$,
- $||\boldsymbol{u} - p(\boldsymbol{u})|| = \displaystyle\min_{\boldsymbol{v}\in F}(||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}||)$,

10 - Minimum d'une intégrale : $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\Big(\int_0^\pi (\cos t - (a+bt))^2\,\mathrm{d}t$.