AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX

1 - Automorphismes orthogonaux :
- définitions équivalentes des applications linéaires qui conservent les produits scalaires, les normes, toutes les bases orthonormales ou au moins une base orthonormale,
- démonstrations de ces équivalences,
- $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe.

2 - Matrices orthogonales définies par ${}^{\mathrm{t}}\!A\,A = \mathbb{1}_n$:
- lien entre le produit scalaire canonique des colonnes et ${}^{\mathrm{t}}\!A\,A$,
- $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe,
- une fois une base orthonormale $\mathcal{B}$ fixée, isomorphisme canonique $\mathrm{mat}(\bullet, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ entre les groupes $(\mathcal{O}(E), \circ)$ et $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$.

3 - Propriétés des automorphismes orthogonaux :
- si $f \in \mathcal{O}(E)$ et F sous-espace stable de f alors $f_{/F} \in \mathcal{O}(F)$, $f(F^\perp) \subset F^\perp$ et $f_{/F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$,
- si $f \in \mathcal{O}(E)$ et $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}_E$ alors $\lambda = \pm 1$.
- si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ alors il existe $\boldsymbol{u} \in E$ vérifiant $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ ou $f(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u}$, par l'étude de $\det(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.

4 - Équivalences sur les endomorphismes et les matrices :
- si $f \in \mathcal{O}(E)$, $\mathcal{B}$ base orthonormale et $M = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$: f est une symétrie si et seulement si M est symétrique,
- si $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection : elle est orthogonale si et seulement si elle diminue les normes.

5 - Cas de la dimension 2 :
- matrices de rotation R_α et matrices de symétrie orthogonale S_α :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \left\{ R_\alpha \,\big/\, \alpha \in]-\pi, \pi] \right\} \mathcal{S} = \left\{ S_\alpha \,\big/\, \alpha \in]-\pi, \pi] \right\}$$

- $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{R}$, $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$,
- représentation graphique de $r_\alpha(\boldsymbol{u})$ et de $s_\alpha(\boldsymbol{u})$,
- calculs de $R_\alpha\,R_\beta$, $R_\alpha\,S_\beta$, $S_\alpha\,R_\beta$ et $S_\alpha\,S_\beta$, R_α^{-1} et S_α^{-1},

les groupes $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ sont commutatifs,
- matrice de passage d'une base orthonormale, base directe quand $\det(P_{\mathcal{B}c \to \mathcal{B}}) > 0$, la matrice d'une rotation est la même dans toute bon directe, il existe une bon directe telle que $\mathrm{mat}(s_\alpha, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.