ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les intervalles considérés dans ce chapitre, généralement notés I, ne sont ni vides ni réduits à un point ; $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in I$. Les applications $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ etc. d'une variable t intervenant dans ce chapitre sont définies et continue sur l'intervalle I.

Équations linéaires explicite du premier ordre

Dans cette partie une primitive de $a(t)$ est notée $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$.
Le premier paragraphe étudie les solutions d'une équation $\mathcal{E}_0$ du premier ordre, linéaire, explicite et homogène ; et le second les solutions d'une équation $\mathcal{E}$ du même type avec second membre :

$$\mathcal{E}_0 \ : \ y' = a(t)\,y \qquad \mathcal{E} \ : \ y' = a(t)\,y + b(t) \qquad A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

• Des solutions d'une équation différentielle $\mathcal{E}_0$ ou $\mathcal{E}$ sont les applications f ou g définies et dérivables sur l'intervalle I vérifiant ces conditions :

$$\forall\, t \in I \quad f'(t) = a(t)\,f(t)$$
$$\forall\, t \in I \quad g'(t) = a(t)\,g(t) + b(t)$$

Équations homogènes

■ L'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions de $y' = a(t)\,y$ est le suivant :

$$\mathcal{H} = \left\{ t \mapsto \lambda\, e^{A(t)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

♦ La démonstration s'effectue par deux inclusions.

◊ Les applications $t \mapsto \lambda\, e^{A(t)}$ sont des solutions de l'équation $\mathcal{E}_0$:

$$A'(t) = a(t) \qquad (\lambda\, e^{A(t)})' = \lambda\, a(t)\, e^{A(t)} \qquad \left\{ t \mapsto \lambda\, e^{A(t)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{H}$$

◊ Réciproquement toute solution $f(t)$ de $\mathcal{E}_0$ est de la forme précédente car l'application $t \mapsto e^{-A(t)}\, f(t)$ est de dérivée nulle donc constante sur l'intervalle I :

$$\left(e^{-A(t)}\, f(t)\right)' = \left(f'(t) - a(t)\, f(t)\right) e^{-A(t)} = 0$$
$$e^{-A(t)}\, f(t) = \lambda \qquad f(t) = \lambda\, e^{-A(t)} \qquad \mathcal{H} \subset \left\{ t \mapsto \lambda\, e^{A(t)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

■ Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ il existe une et une seule application f solution de $y' = a(t)\,y$ vérifiant $f(t_0) = y_0$.

♦ Si la solution f vérifie la condition initiale alors $f \in \mathcal{H}$ est de la forme $f(t) = \lambda e^{A(t)}$, $f(t_0) = \lambda e^{A(t_0)}$ et $\lambda = f(t_0)/e^{A(t_0)}$. Il existe donc au maximum une telle solution.
Réciproquement l'application $f : t \mapsto (y_0/e^{A(t_0)})\, e^{A(t)}$ est une solution de $\mathcal{E}_0$ qui vérifie la condition initiale $f(t_0) = y_0$.

□ Toute solution f définie sur un intervalle I de l'équation $y' = a(t)\,y$ qui s'annule en un point de I est l'application nulle sur I.

∗ Ainsi soit une solution de l'équation homogène explicite du premier ordre ne s'annule pas soit elle est constante égale à 0 :

$$\left(\exists\, t \in I \quad f(t) = 0\right) \iff \left(\forall\, t \in I \quad f(t) = 0\right)$$

◊ L'application nulle est solution de toutes les équations linéaires homogènes, donc par le théorème précédent d'unicité $f = 0_{I \to \mathbb{R}}$.

Équations avec second membre

■ L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $\mathcal{E} : y' = a(t)\,y + b(t)$ est obtenu à partir de l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions de l'équation homogène $\mathcal{E}_0 : y' = a(t)\,y$ et d'une solution f de $\mathcal{E}$:

$$\underbrace{\mathcal{H} = \left\{ t \mapsto \lambda\, e^{A(t)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{solutions de } y' = a(t)\,y} \quad \underbrace{\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto f(t) + \lambda\, e^{A(t)} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}_{\text{solutions de } y' = a(t)\,y + b(t)} = f + \mathcal{H}$$

∗ Il suffit donc de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre et de résoudre l'équation homogène pour obtenir l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.

◊ Cette propriété transcrit la structure des solutions des équations linéaires au cas particulier des équations du premier ordre.

Méthode de la variation de la constante

■ La méthode de la variation de la constante ramène la recherche d'une solution particulière $f(t) = \lambda(t)\, g(t)$ de l'équation avec second membre au calcul d'une primitive de $\lambda'(t)$, en notant $g(t)$ une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas, par exemple $g(t) = e^{A(t)}$:

$$g'(t) = a(t)\, g(t) \qquad f(t) = \lambda(t)\, g(t)$$

$$\begin{aligned} & f'(t) - a(t)\, f(t) - b(t) = 0 \\ & = \lambda'(t)\, g(t) + \lambda(t)\, a(t)\, g(t) - a(t)\, \lambda(t)\, g(t) - b(t) \\ & = \lambda'(t)\, g(t) - b(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda'(t) = \frac{b(t)}{g(t)} \qquad \lambda(t) = \int \frac{b(t)}{g(t)}\, \mathrm{d}t \qquad f(t) = \lambda(t)\, g(t) \text{ est solution de } \mathcal{E}.$$

Ce calcul est licite lorsque le quotient par $g(t)$ ne s'annule pas, par exemple lorsque $g(t) = e^{A(t)} \neq 0$.
Réciproquement une telle application $f(t) = \lambda(t)\, g(t)$ où $\lambda(t)$ est une primitive de $b(t)/g(t)$ est bien solution de l'équation différentielle.

▹ La résolution de l'équation $y' = (\tan t)\, y + \cos t$ illustre cette méthode sur tout intervalle $I =]p\pi - \pi/2,\, p\pi + \pi/2[$ où $p \in \mathbb{Z}$.

⊳⊳ L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = (\tan t) y$ est noté $\mathcal{H}$:

$$a(t) = \tan t \qquad A(t) = \int \tan t\, \mathrm{d}t = \int \frac{\sin t}{\cos t}\, \mathrm{d}t = -\ln|\cos t|$$

$$e^{-\ln|\cos t|} = \frac{1}{|\cos t|} \qquad \text{sur } I =]p\pi - \pi/2,\, p\pi + \pi/2[\text{ où } p \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{H} = \left\{ t \mapsto \frac{\mu}{|\cos t|} \;/\; \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \mapsto \frac{\lambda}{\cos t} \;/\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda'(t) = \frac{\cos t}{\frac{1}{\cos t}} = \cos^2 t$$

$$\lambda(t) = \int \cos^2 t\, \mathrm{d}t = \int \frac{\cos(2t) + 1}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{\cos t}\Big(\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + \lambda \Big) = \frac{\sin t}{2} + \frac{t}{2\cos t} + \frac{\lambda}{\cos t}$$

Remplacer μ par $\pm\lambda$ ne modifie par l'ensemble $\mathcal{H}$ car l'application cos est de signe constant sur l'intervalle I, et simplifie les calculs suivants.

□ Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ il existe une et une seule application f solution de $y' = a(t)\, y + b(t)$ vérifiant $f(t_0) = y_0$.

◊ Cette propriété découle du lien entre les solutions des équations homogènes et celles avec second membre, et de la propriété similaire sur les équations homogènes.
Si les applications f et $\widetilde{f}$ sont solutions de $\mathcal{E}$ vérifiant l'égalité $f(t_0) = \widetilde{f}(t_0) = y_0$, alors $f - \widetilde{f}$ est une solution de $\mathcal{E}_0$ s'annulant en t_0, donc l'application $f - \widetilde{f}$ est nulle et $f = \widetilde{f}$, d'où l'unicité :

$$f'(t) = a(t)\, f(t) + b(t) \qquad \widetilde{f}'(t) = a(t)\, \widetilde{f}(t) + b(t)$$

$$(f - \widetilde{f})'(t) = a(t)\, (f - \widetilde{f})(t)$$

Si l'application g est une solution quelconque de $\mathcal{E}$ alors les solutions de $\mathcal{E}$ sont de la forme $t \mapsto g(t) + \lambda e^{A(t)}$, et le solution obtenue pour $\lambda = (y_0 - g(t_0))e^{-A(t_0)}$ convient, d'où l'existence de la solution f :

$$f(t) = g(t) + \lambda e^{A(t)} = g(t) + (y_0 - g(t_0))e^{-A(t_0)}e^{A(t)}$$

$$f(t_0) = g(t_0) + (y_0 - g(t_0)) = y_0$$

Équations linéaires du deuxième ordre

Équations homogènes à coefficients constants

Ce paragraphe étudie l'équation différentielle linéaire $\mathcal{E}_0$ homogène du second ordre à coefficients constants u et v dans $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{E}_0 \;:\; y'' = uy' + vy \qquad P(z) = z^2 - uz - v \qquad (u,v) \in \mathbb{C}^2$$

★ Les dérivées des applications h de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ sont définies par dérivation des parties réelles et imaginaires, et la formulaire de dérivation est comparable à celui des applications réelles :

$$\mathrm{re}(h) : t \mapsto (\mathrm{re}(h))(t) = \mathrm{re}(h(t)) \qquad \mathrm{im}(h) : t \mapsto (\mathrm{im}(h))(t) = \mathrm{im}(h(t))$$

$$\mathrm{re}(h') : t \mapsto (\mathrm{re}(h'))(t) = (\mathrm{re}(h))'(t)$$

$$\mathrm{im}(h') : t \mapsto (\mathrm{im}(h'))(t) = (\mathrm{im}(h))'(t)$$

$$h = \mathrm{re}(h) + \mathrm{im}(h) \qquad h' = (\mathrm{re}(h))' + (\mathrm{im}(h))'$$

• Le polynôme $P(z)$ est appelé polynôme caractéristique de $\mathcal{E}_0$ et ses racines sont notées soit r_1 et $r_2 \neq r_1$, soit r si r est une racine double.

⊠ L'application $t \mapsto e^{\rho t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ où $\rho \in \mathbb{C}$ est une solution de l'équation $\mathcal{E}_0$ si et seulement si $\rho \in \mathbb{C}$ est une racine, réelle ou complexe, simple ou double, du polynôme caractéristique P.

◊ L'équation différentielle homogène étudiée aboutit à ces égalités :

$$(e^{\rho t})'' - u\,(e^{\rho t})' - v\,(e^{\rho t}) = e^{\rho t}(\rho^2 - u\rho - v) = e^{\rho t} P(\rho)$$

Comme la valeur de l'exponentielle complexe est différente de zéro, l'application $t \mapsto e^{\rho t}$ est solution si et seulement si $P(\rho) = 0$.

⊠ L'application $t \mapsto t\,e^{\rho t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est solution de l'équation $\mathcal{E}_0$ si et seulement si $\rho \in \mathbb{C}$ est une racine double du polynôme caractéristique P.

◊ Les dérivées du produit $t\,e^{\rho t}$ justifient ce résultat :

$$P(\rho) = \rho^2 - u\rho - v = 0 \qquad P'(\rho) = 2\rho - u = 0$$
$$(t\,e^{\rho t})' = e^{\rho t}(\rho t + 1) \qquad (t\,e^{\rho t})'' = e^{\rho t}(\rho^2 t + 2\rho)$$
$$(t\,e^{\rho t})'' - u\,(t\,e^{\rho t})' - v\,(t\,e^{\rho t}) = e^{\rho t}(\rho^2 t + 2\rho - u\rho t - u - vt)$$
$$= e^{\rho t}(P(\rho)\,t + P'(\rho)) = 0$$

L'application $t \mapsto te^{\rho t}$ est donc solution si et seulement si l'application $t \mapsto e^{\rho t}(P(\rho)\,t + P'(\rho))$ est nulle. L'exponentielle n'étant jamais de valeur nulle, il faut et il suffit que l'application polynomiale $t \mapsto P(\rho)\,t + P'(\rho)$ soit nulle. Pour tout intervalle ni vide ni réduit à un point cette application est nulle si et seulement si les coefficients du polynôme sont nuls : $P(\rho) = 0$ et $P'(\rho) = 0$, autrement dit ρ est racine double de P.

■ Les applications solutions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de l'équation différentielle homogène $y'' = uy' + vy$ dépendent du polynôme caractéristique :

racine double	$P(r) = P'(r) = 0$	$\Delta = u^2 + 4v = 0$	$(\lambda t + \mu)\,e^{rt}$
racine simple	$r_1 \neq r_2$	$\Delta \neq 0$	$\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$

Les constantes complexes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ sont quelconques.

◊ La vérification que ces exponentielles sont dans l'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions a été présentée dans les deux lemmes précédents, un argument de stabilité par combinaisons linéaires des solutions de l'équation linéaire homogène démontre l'inclusion :

racine double r : $\left\{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \subset \mathcal{H}$

racines simples r_1 et $r_2 \neq r_1$ $\left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + +\mu e^{r_2 t} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \subset \mathcal{H}$

◊ Réciproquement soit f une solution de $\mathcal{E}_0$ et ρ une racine du polynôme caractéristique. Notons $h(t) = f(t)/e^{\rho t}$. L'application h' vérifie donc cette équation différentielle en z :

$$f(t) = e^{\rho t}\,h(t) \qquad f'(t) = \rho e^{\rho t}\,h(t) + e^{\rho t}\,h'(t)$$
$$f''(t) = \rho^2 e^{\rho t}\,h(t) + 2\rho e^{\rho t}\,h'(t) + e^{\rho t}\,h''(t)$$
$$\begin{aligned} 0 &= f''(t) - u\,f'(t) - v\,f(t) \\ &= \quad \rho^2 e^{\rho t}\,h(t) + 2\rho e^{\rho t}\,h'(t) + e^{\rho t}\,h''(t) \\ &\quad - u\rho e^{\rho t}\,h(t) - ue^{\rho t}\,h'(t) - ve^{\rho t}\,h(t) \\ &= e^{\rho t}\big((\rho^2 - u\rho - v)\,h(t) + (2\rho - u)\,h'(t) + h''(t)\big) \qquad P(\rho) = 0 \\ &= e^{\rho t}\big((2\rho - u)\,h'(t) + h''(t)\big) \qquad e^{\rho z} \neq 0 \qquad z' = (u - 2\rho)z \end{aligned}$$

En conclusion l'application f est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si l'application h' est solution de $z' = (u - 2\rho)z$.

◊ Les deux cas possibles dans l'équation différentielle précédente sont $u - 2\rho = 0$ ou $u - 2\rho \neq 0$. Lorsque $P(\rho) = 0$ cette équivalence distingue si ρ est racine double ou simple du polynôme caractéristique :

$$P'(\rho) = 2\rho - u \quad u - 2\rho = 0 \Longleftrightarrow \rho \text{ est racine double de } P$$
$$u - 2\rho \neq 0 \Longleftrightarrow \rho \text{ est racine simple de } P$$

Si la racine ρ de P est double alors l'application h' est constante et $h(t)$ est de la forme $h(t) = \lambda t + \mu$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions de $\mathcal{E}_0$ sont de la forme $(\lambda t + \mu)\,e^{\rho t}$ où ρ est la racine double du polynôme caractéristique.
Si la racine ρ de P est simple alors la somme des deux racines complexes ρ et $\widetilde{\rho}$ du polynôme caractéristique est $\rho + \widetilde{\rho} = u$ et $u - 2\rho = \widetilde{\rho} - \rho$. Les solutions de l'équation en z puis de l'équation $\mathcal{E}_0$ sont donc de la forme suivante :

$$h'(t) = \mu e^{(u-2\rho)t} = \mu e^{(\widetilde{\rho}-\rho)t} \qquad h(t) = \mu e^{(\widetilde{\rho}-\rho)t} + \lambda$$
$$f(t) = e^{\rho t}\,h(t) = (\mu e^{(\widetilde{\rho}-\rho)t} + \lambda)\,e^{\rho t} = \mu e^{\widetilde{\rho} t} + \lambda e^{\rho t}$$

La démonstration effectuée énonce que si f est une solution de $\mathcal{E}_0$ alors f est de l'une ou l'autre forme précédente :

racine double r : $\mathcal{H} \subset \left\{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

racines simples r_1 et $r_2 \neq r_1$ $\mathcal{H} \subset \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + +\mu e^{r_2 t} \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

■ Lorsque $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, les applications solutions sur $\mathbb{R}$ dépendent du nombre des racines réelles du polynôme caractéristique :

$$\begin{array}{lll} \Delta = u^2+4v=0 & (\lambda t+\mu)\, e^{r_1 t} & \text{où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \\ \Delta>0 & \lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t} & \\ \Delta<0 & e^{ut/2}(\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)) & \omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} \end{array}$$

◊ Ce résultat est obtenu en séparant les parties réelles et imaginaires des solutions complexes de $\mathcal{E}_0$. Les parties réelles des solutions complexes décrivent l'ensemble des fonctions réelles solutions car les coefficients de l'équation différentielle sont réels.

◊ Plus précisément notons $\mathcal{S}_\mathbb{R}$ et$\mathcal{S}_\mathbb{C}$ l'ensemble des solutions réelles et complexes de cette équation différentielle et montrons $\mathcal{S}_\mathbb{R} = \mathrm{re}(\mathcal{S}_\mathbb{C})$ par deux inclusions.
Si f est une solution complexe, alors $\mathrm{re}\, f$ est solution réelle de l'équation d'où l'inclusion $\mathrm{re}(\mathcal{S}_\mathbb{C}) \subset \mathcal{S}_\mathbb{R}$.
Réciproquement si f est une solution réelle, alors $f = f + 0\mathrm{i}$ est solution complexe de l'équation car l'application nulle est solution de toute équation linéaire et homogène, d'où $f = \mathrm{re}(f+0\mathrm{i})$ et l'inclusion $\mathcal{S}_\mathbb{R} \subset \mathrm{re}\,\mathcal{S}_\mathbb{C}$.

◊ Lorsque le discriminant est négatif les racines complexes $u/2 \pm \mathrm{i}\omega$ sont conjuguées, et les parties réelles des exponentielles complexes font intervenir les fonctions sin et cos. Pour cela, calculons la partie réelle d'une solution complexe quelconque ; soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{re}(\alpha e^{\mathrm{i}\omega t}) = \mathrm{re}\,\alpha\, \cos t - \mathrm{im}\,\alpha\, \sin t \\ &\mathrm{re}(\alpha e^{(u/2+\mathrm{i}\omega)t} + \beta e^{(u/2-\mathrm{i}\omega)t}) \\ = {} & e^{ut/2}\big(\mathrm{re}(\alpha e^{\mathrm{i}\omega t}) + \mathrm{re}(\beta e^{-\mathrm{i}\omega t})\big) \\ = {} & e^{ut/2}\Big(\mathrm{re}(\beta+\alpha)\, \cos t + \mathrm{im}(\beta-\alpha)\, \sin t\Big) \\ = {} & e^{ut/2}(\lambda\, \cos t + \mu\, \sin t) \end{aligned}$$

Toutes les couples réels $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ sont possibles en prenant par exemple $\alpha = 0$ et $\beta = \lambda + \mathrm{i}\mu$.

∗ L'ensemble $\mathcal{H}$ des solutions réelles de l'équation homogène $\mathcal{E}_0$ découle de ce théorème :

$$\mathcal{E}_0 \;:\; y''+y=0 \qquad P(z)=z^2+1 \qquad P(\pm\mathrm{i})=0$$
$$\mathcal{H} = \Big\{\lambda\, \cos t + \mu\, \sin t \;/\; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\Big\}$$

Équations avec second membre exponentiel

■ Lorsque $(a,s)\in\mathbb{C}^2$ est un polynôme, il existe une solution particulière f de $y'' = uy' + vy + a, e^{st}$ de la forme suivante selon que s est racine ou non, simple ou double, du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P(s)\neq 0 &\Longrightarrow f(t) = \alpha\, e^{st} \\ P(s)=0 \text{ ET } P'(s)\neq 0 &\Longrightarrow f(t) = (\alpha t+\beta)\, e^{st} \\ P(s)=0 \text{ ET } P'(s)=0 &\Longrightarrow f(t) = (\alpha t^2+\beta t+\gamma)\, e^{st} \end{aligned}$$

★ Les coefficients α, β et éventuellement γ se calculent généralement par identification terme à terme des coefficients.

∗ L'ensemble des solutions est, comme pour toute équation linéaire, la somme d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions de l'équation générale.

▹ Résolution de l'équation $y'' = 5y' - 6y + 2\, e^{2t}$.

⊳⊳ Cet exemple illustre la méthode précédente pour rechercher une solution particulière, puis énoncer toutes les solutions :

$$y'' = 5y' - 6y + 2\, e^{2t} \qquad P(z) = z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$$
$$s=2 \qquad a=2$$
$$P(2)=0 \qquad P'(2) = -1 \neq 0$$

Une solution particulière est donc de la forme $(\alpha t+\beta)e^{2t}$

Principe de superposition

★ Si f est une solution de l'équation différentielle $y'' = uy' + vy + a(t)$ et si g est une solution de l'équation différentielle $y'' = uy' + vy + b(t)$ de même partie linéaire, alors $\lambda f + \mu g$ est solution de l'équation différentielle $y'' = uy' + vy + \lambda\, a(t) + \mu\, b(t)$,

∗ Le principe de superposition et la linéarisation des formules de trigonométrie permettent de résoudre des équations dont le second membre n'est pas exactement un de ceux décrits précédemment :

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \cosh t\,\cos t = \frac{1}{2}(e^t\,\cos t + e^{-t}\,\cos t)\\
&= \frac{1}{4}(e^{(1+\mathrm{i})t} + e^{(1-\mathrm{i})t} + e^{(-1+\mathrm{i})t} + e^{(-1-\mathrm{i})t})\\
a(t) &= \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}
\end{aligned}
$$

La première formule de $a(t)$ permet d'appliquer ce dernier théorème pour les solutions réelles, et sa seconde expression se réfère à la première méthode de résolution dans $\mathbb{C}$.

$*$ Regrouper les complexes conjugés permet ensuite d'obtenir les solutions réelles en $\cos t$ et $\sin t$ à la place de celles en $e^{\pm \mathrm{i}\, t}$.