ESPACES EUCLIDIENS

Dans ce chapitre E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in E^3$. Les vecteurs U, V et W de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et sa base canonique $\mathcal{B}c$ sont notés ainsi :

$$U\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}\qquad V\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\qquad W\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}\qquad \mathcal{B}c=(E_1,E_2,\cdots,E_n)$$

Présentation des normes

• Une norme est une application $||\bullet||:E\to\mathbb{R}_+$ caractérisée ainsi :

$$\begin{array}{rll}\forall\,\boldsymbol{u}\in E & ||\boldsymbol{u}||\geq 0 & \text{la norme est positive,}\\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\ \ \forall\,\boldsymbol{u}\in E & ||\lambda\boldsymbol{u}||=|\lambda|\,||\boldsymbol{u}|| & \text{est homogène,}\\ \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in E^2 & ||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||\leq||\boldsymbol{u}||+||\boldsymbol{v}|| & \text{vérifie l'inégalité triangulaire,}\\ \forall\,\boldsymbol{u}\in E & ||\boldsymbol{u}||=0\Longrightarrow\boldsymbol{u}=\mathbf{0}_E & \text{et est séparable.}\end{array}$$

• Les propriétés ci-dessous découlent de cette définition :

$$||\mathbf{0}_E||=0\qquad||-\boldsymbol{u}||=||\boldsymbol{u}||\qquad\big|\,||\boldsymbol{u}||-||\boldsymbol{v}||\,\big|\leq||\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v}||$$

• Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont les suivantes :

$$||U||_1=\sum_{k=1}^n|u_k|\qquad||U||_\infty=\max_{1\leq k\leq n}|u_k|\qquad||U||_2=\sqrt{\sum_{k=1}^n u_k^2}$$

L'inégalité triangulaire pour la norme $||\bullet||_2$ peut être démontrée grâce aux règles usuelles du calcul algébrique et aux produits remarquables, ou à partir de l'inégalité Cachy-Schwarz exposée dans la suite de ce chapitre.

Formes bilinéaires et formes quadratiques

Formes bilinéaires

• Une application f de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ est bilinéaire si et seulement si les deux applications partielles f_1 et f_2 sont linéaires pour n'importe quels vecteurs $\boldsymbol{v}_0$ et $\boldsymbol{w}_0$ de E :

$$\begin{array}{rl}f_1=f(\bullet,\boldsymbol{w}_0):E\longrightarrow\mathbb{R}\\ \boldsymbol{v}\longmapsto f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_0)\end{array}\qquad\begin{array}{rl}f_2=f(\boldsymbol{v}_0,\bullet):E\longrightarrow\mathbb{R}\\ \boldsymbol{w}\longmapsto f(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{w})\end{array}$$

Toutes les applications partielles obtenues en fixant un paramètre, l'autre étant la variable, sont linéaires.

• Par exemple ces applications sont des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$:

$$f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=(a+b)(y-z)\qquad g\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=by-az$$

$$f_1:\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\mapsto(y_0-z_0)(a+b)\qquad f_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto(a_0+b_0)(y-z)$$

Les applications partielles de f et g sont des combinaisons linéaires des coordonnées du paramètre variable, l'autre étant fixé.

• En particulier toute forme bilinéaire vérifie ces proprositions :

$$f(-\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=f(\boldsymbol{v},-\boldsymbol{w})=-f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\qquad f(\mathbf{0}_E,\boldsymbol{w})=f(\boldsymbol{v},\mathbf{0}_E)=0$$

• L'ensemble des formes bilinéaires sur E est un espace vectoriel noté $\mathcal{L}_2(\mathrm{E},\mathbb{R})$ car il constitue un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{E\times E}$ des applications de E^2 dans $\mathbb{R}$.
En effet l'application nulle est bien bilinéaire, et une combinaison linéaire d'application bilinéaire est une application bilinéaire.

• L'espace $\mathcal{L}_2(E,\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel des formes linéaires comme $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(E^2,\mathbb{R})$; ces exemples l'illustrent pour $E=\mathbb{R}^3$:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x+2y-z\qquad V\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\qquad\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=(b+y)-(a+z)\qquad h\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=ab-yz$$

L'application f est une forme linéaire de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ car elle est définie par une combinaison linéaire des coordonnées du vecteur inital.
L'application g est une forme linéaire de $\mathcal{L}(E\times E,\mathbb{R})$, où l'espace produit $E\times E$ est comparable à l'espace des matrices $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
Les applications g et h ne sont pas bilinéaires car, au contraire de n'importe quelle forme bilinéaire, elles ne sont pas de valeur nulle

dès que l'un des paramètres est le vecteur nul, $g(V, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = 1 \neq 0$ et $h(V, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = 2$.

• Lorsque $V = (v_k)_{k=1}^n$ et $W = (w_k)_{k=1}^n$ sont les coordonnées des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ de E dans la base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$, les n^2 applications $(\varphi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ constituées d'un produit d'une coordonnée de chacun des deux vecteurs sont des formes bilinéaires de E :

$$\varphi_{i,j}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = v_i\, w_j \qquad \varphi_{i,j} \in \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R}) \qquad \text{pour } (i,j) \in \{1 \cdots n\}^2$$
$$\dim(\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})) = (\dim E)^2$$

• Les applications $\varphi_{i,j}$ sont bien bilinéaires car les coordonnées de $\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}$ sont les combinaisons linéaires des coordonnées de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= (\lambda u_i + \mu v_i) w_j = \lambda u_i w_j + \mu v_i w_j \\ &= \lambda\, \varphi_{i,j}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \mu\, \varphi_{i,j}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

La démonstration est similaire pour la seconde coordonnée.
L'étude des images de la base $\mathcal{B}_E$ par $\varphi_{i,j}$ justifie que cette famille est libre :

$$\varphi_{i,j}(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_s) = \delta_{i,r} \delta_{j,s} \quad \text{pour } (r,s) \in \{1 \cdots n\}^2 \text{ où } \delta_{x,y} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j}\, \varphi_{i,j} = 0_{E^2 \to \mathbb{R}} &\Longrightarrow \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j}\, \varphi_{i,j}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_\ell) = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_{k,\ell} = 0 \qquad \text{valable pour tout } k \text{ et } \ell \end{aligned}$$

Avec ces notations, toute forme bilinéaire f sur E se développe en une combinaison linéaire des applications de la famille $(\varphi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ qui est donc génératrice de $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$:

$$f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} v_i\, w_j\, f(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)$$
$$f = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)\, \varphi_{i,j}$$

• La forme bilinéaire $f \in \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ est symétrique à cette condition :

$$\forall\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in E^2 \quad f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

• Le calcul de la valeur d'une forme bilinéaire $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ se ramène au produit matriciel suivant où $V \in \mathbb{R}^n$ et $W \in \mathbb{R}^n$ sont les coordonnées des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ de E :

$${}^{\mathrm{t}}V = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \qquad W \in \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} A &= (f(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ &= \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_n) \\ f(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1) & f(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_n) \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} v_i\, w_j\, f(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = {}^{\mathrm{t}}V A W \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \quad \text{assimilé à } \mathbb{R}$$

• La forme bilinéaire f est symétrique si et seulement si sa matrice A dans la base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est symétrique, autrement dit $f(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = f(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_i)$ pour tout couple $(i,j) \in \{1 \cdots n\}^2$.

Formes quadratiques

• La forme quadratique q associée à la forme bilinéaire symétrique f sur E est définie ainsi :

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto q(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

• Réciproquement une application q de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique dès qu'il existe une forme bilinéaire symétrique f vérifiant $q(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ pour tout $\boldsymbol{v} \in E$.

• Toute forme quadratique q vérifie nécessairement ces propositions :

$$q(\mathbf{0}_E) = 0 \qquad q(-\boldsymbol{v}) = q(\boldsymbol{v}) \qquad q(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda^2\, q(\boldsymbol{v})$$

• La forme bilinéaire f associée à une forme quadratique q est unique, et appelée forme polaire de q ; ces égalités de polarisation la définissent :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \frac{1}{2}\big(q(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - q(\boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{w})\big) \\ &= \frac{1}{4}\big(q(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - q(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})\big) \end{aligned}$$

• L'exemple suivant illustre comment vérifier qu'une application q de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique :

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + xy + y^2$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\Big(q\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} - q\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}\Big)$$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}\Big((x_1+x_2)^2 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (y_1+y_2)^2\Big) \\ &\quad - \frac{1}{4}\Big((x_1-x_2)^2 + (x_1-x_2)(y_1-y_2) + (y_1-y_2)^2\Big) \\ &= x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + y_1y_2 \end{aligned}$$

L'application f est une combinaison linéaire de produits d'une coordonnée de chaque vecteur. Ces produits correspondent aux quatre applications $(\varphi_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$ de la base de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ construite à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ainsi l'application f est bien une forme bilinéaire.
Par ailleurs la forme bilinéaire f est symétrique à cause de la symétrie de son expression, et est bien associée à la forme quadratique q.

• La méthode pratique consiste souvent à montrer en premier que la forme bilinéaire f obtenue est symétrique puis à vérifier ensuite la linéarité par rapport à la première variable ; la linéarité par rapport à la seconde variable découle de la symétrie :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{w}) &= f(\lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) \\ &= \lambda\, f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) + \mu\, f(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}) = \lambda\, f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \mu\, f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

• L'expression $f(V,W)$ de la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q de $\mathbb{R}^n$ peut être directement construite par ces transformations des carrés et des produits de $q(V)$; elles illustrent les formules de polarisation pour $(i,j,k)\in\{1\cdots n\}^3$:

$$v_k^2 \longrightarrow \frac{(v_k+w_k)^2 - (v_k-w_k)^2}{4} = v_kw_k$$
$$v_iv_j \longrightarrow \frac{(v_i+w_i)(v_j+w_j) - (v_i-w_i)(v_j-w_j)}{4} = \frac{1}{2}(v_iw_j + v_jw_i)$$

• Une forme quadratique q est dite positive si elle est à valeurs positives :

$$\forall\, \boldsymbol{v}\in E \quad q(\boldsymbol{v}) \geq 0$$

• Une forme quadratique q est définie positive si et seulement si elle est à valeurs strictement positives pour tout vecteur non nul ; elle est caractérisée par ces deux propositions équivalentes :

$$\forall\, \boldsymbol{v}\in E \quad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}_E \Longrightarrow q(\boldsymbol{v}) > 0$$
$$\big(\forall\, \boldsymbol{v}\in E \quad q(\boldsymbol{v}) \geq 0\big) \text{ ET } \big(\forall\, \boldsymbol{v}\in E \quad q(\boldsymbol{v}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_E\big)$$

La démonstration qu'une forme quadratique est définie positive se fait généralement en deux étapes en suivant la seconde proposition.

• L'exemple précédent vérifie qu'une application q sur $\mathbb{R}^2$ est une forme quadratique et construit la forme bilinéaire associée.
Les propriétés des sommes de nombres positifs, des carrés de réels dans ce cas, prouvent successivement que cette forme quadratique est positive puis qu'elle est définie positive :

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}\big((x+y)^2 + x^2 + y^2\big) \geq 0$$
$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 = 0 &\Longrightarrow (x+y)^2 = x^2 = y^2 = 0 \\ &\Longrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

Produits scalaires et normes euclidiennes

Inégalité de Cauchy-Schwarz et normes euclidiennes

• Un produit scalaire est par définition une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique définie positive sur un espace vectoriel dont le corps de base est $\mathbb{R}$, il est généralement noté $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$.

• Tout produit scalaire vérifie cette inégalité qui correspond au discriminant Δ d'un polynômes du second degré en λ :

$$0 \leq \langle \lambda\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \mid \lambda\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle\, \lambda^2 + 2\, \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle\, \lambda + \langle \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \rangle$$
$$\Delta = 4\Big(\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle^2 - \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \rangle\Big) \leq 0 \qquad \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \rangle$$

L'inégalité est aussi valable lorque $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_E$ car $\langle \boldsymbol{0}_E \mid \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{0}_E \mid \boldsymbol{0}_E \rangle = 0$.

• Ces deux inégalités valables pour n'importe quels vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ de E sont appelées inégalités de Cauchy-Schwarz :

$$\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \rangle \qquad |\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle| \leq ||\boldsymbol{v}||\,||\boldsymbol{w}||$$

Théorème des normes euclidiennes

• La racine carrée de la forme quadratique associée à un produit scalaire est une norme, appelée norme euclidienne et généralement notée $||\bullet||$:

$$\begin{aligned} ||\bullet|| : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \sqrt{\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v}\rangle} \end{aligned}$$

• L'inégalité triangulaire se montre par l'inégalité de Cauchy-Scwharz :

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}||^2 &= ||\boldsymbol{v}||^2 + ||\boldsymbol{w}||^2 + 2\,\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w}\rangle \\ &\leq ||\boldsymbol{v}||^2 + ||\boldsymbol{w}||^2 + 2\,||\boldsymbol{v}||\,||\boldsymbol{w}|| = \big(||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{w}||\big)^2 \end{aligned}$$

• Les autres autres propriétés des normes se démontrent directement à partir de la définition du produit scalaire.

• Les conditions suivantes caractérisent les cas d'égalité dans les inégalités de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w}\rangle^2 = ||\boldsymbol{v}||^2||\boldsymbol{w}||^2 &\iff (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \text{ est liée} \\ &\iff \big(\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_E \text{ OU } \exists\,\lambda\in\mathbb{R}\quad \boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{v}\big) \\ \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w}\rangle = ||\boldsymbol{v}||\,||\boldsymbol{w}|| &\iff \big(\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_E \text{ OU } \exists\,\lambda\in\mathbb{R}_+\quad \boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{v}\big) \end{aligned}$$

• Deux vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ vérifiant $\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w}\rangle$ sont dits orthogonaux.

Exemples de normes euclidiennes

• Le produit scalaire canonique $\langle \bullet \mid \bullet\rangle$ sur $\mathbb{R}^n$ est défini ainsi, il associé à la norme euclidienne canonique $||\bullet||_2$:

$$\begin{aligned} \langle \bullet \mid \bullet\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (V, W) &\longmapsto \sum_{k=1}^n v_k w_k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ||\bullet||_2 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ V &\longmapsto ||V||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} \end{aligned}$$

• Ce produit scalaire est le seul à être régulièrement employé dans l'espace $\mathbb{R}^n$, sauf si la propriété étudiée en explicite un autre.
Il correspond au produit scalaire de la géométrie euclidienne de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ obtenue à la « règle et au compas ».

• Les normes euclidiennes se rencontrent par ailleurs dans les espaces de polynômes ; ces applications correspondent respectivement à un produit scalaire et à une norme euclidienne de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t \qquad ||P|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Cette forme $\langle \bullet \mid \bullet\rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathbb{R}[X]$.
Les propriétés des intégrales des applications continues et positives, et le fait qu'un polynôme non nul a nécessairement un nombre fini de racines impliquent que cette forme bilinéaire est définie positive.

• Plus généralement, une fois fixée une application f continue à valeurs strictement positive sur le segment $[a, b]$ où $a < b$, ces applications correspondent à d'autres produits scalaires et des autres normes euclidiennes sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_a^b f(t)\,P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t \qquad ||P|| = \sqrt{\int_a^b f(t)\,P(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

La démonstration repose sur les mêmes principes que la précédente.

• Dans ces exemples vérifier que $||\bullet||$ est bien une norme provient du théorème précédent relatif à la racine carrée d'une forme quadratique définie positive, et n'impose pas de vérifier les propriétés caractéristiques des normes.
Cette méthode est généralement plus facile que celle consistant à justifier l'inégalité triangulaire.

• Cette application est donc une norme car elle correspond à la racine carrée d'une forme quadratique définie positive étudiée dans le paragraphe précédent :

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x^2 + xy + y^2} \qquad q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + xy + y^2$$

Le cours de géométrie montre que l'ensemble des vecteurs unitaire pour cette norme représenté dans le repère orthonormé usuel de la géométrie euclidienne est une ellipse.

Propriétés des normes euclidiennes

• Toute norme euclidienne vérifie les formules de polarisation et l'identité du parallélogramme :

$$\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w}\rangle = \frac{1}{4}\big(||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}||^2 - ||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}||^2\big) = \frac{1}{2}\big(||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}||^2 - ||\boldsymbol{v}||^2 - ||\boldsymbol{w}||^2\big)$$
$$||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}||^2 + ||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}||^2 = 2\big(||\boldsymbol{v}||^2 + ||\boldsymbol{w}||^2\big)$$

• L'égalité de Pythagore caractérise les vecteurs orthogonaux :

$$\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w}\rangle = 0 \iff ||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}||^2 = ||\boldsymbol{v}||^2 + ||\boldsymbol{w}||^2$$

• Plus généralement les propriétés sur les normes euclidiennes $||\bullet||$ exploitent le produit scalaire sous-jacent ; et le fait que les normes soient à valeurs positives permet de prouver leur égalité et étudiant leur carré, qui est un produit scalaire :

$$||\boldsymbol{u}|| = ||\boldsymbol{v}|| \Longleftrightarrow ||\boldsymbol{u}||^2 = ||\boldsymbol{v}||^2 \Longleftrightarrow \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle$$

• Réciproquement une norme quelconque n'est pas nécessairement associée à un produit scalaire et ne vérifie pas obligatoirement l'inégalité du parallélogramme ; par exemple les normes $||\bullet||_1$ et $||\bullet||_\infty$ ne sont pas euclidiennes :

$$U \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad U+V \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad U-V \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2(||U||_1^2 + ||V||_1^2) &= 2(5^2+5^2) = 100 \\ ||U+V||_1^2 + ||U-V||_1^2 &= \ 10^2 + 4^2 \ = 116 \neq 100 \\ 2(||U||_\infty^2 + ||V||_\infty^2) &= 2(4^2+3^2) = 50 \\ ||U+V||_\infty^2 + ||U-V||_\infty^2 &= \ 6^2+2^2 \ = 40 \neq 50 \end{aligned}$$

Orthogonalité et familles orthogonales

• L'orthogonal d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ de E ou d'un sous-ensemble $X \subset E$ sont définis ainsi :

$$\boldsymbol{u}^\perp = \big\{\boldsymbol{w} \in E \ \big/ \ \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \rangle = 0\big\} \qquad X^\perp = \big\{\boldsymbol{w} \in E \ \big/ \ \forall\, \boldsymbol{u} \in X \quad \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \rangle = 0\big\}$$

$$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}^\perp = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^\perp = \big\{\boldsymbol{w} \in E \ \big/ \ \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle = 0\big\} = \boldsymbol{u}^\perp \cap \boldsymbol{v}^\perp$$

• Un vecteur $\boldsymbol{w}$ est orthogonal à un sous-ensemble $X \subset E$ est orthogonal à tout vecteur de X :

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in X \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in X^\perp \quad \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle = 0$$

• Les ensembles de vecteurs orthogonaux vérifient les propriétés suivantes lorsque $\lambda \neq 0$, et X et Y sont des sous-ensembles de vecteurs :

$$\boldsymbol{u}^\perp = (\lambda \boldsymbol{u})^\perp \qquad \boldsymbol{0}^\perp = E \qquad E^\perp = \{\boldsymbol{0}_E\} \qquad X \subset Y \Longrightarrow Y^\perp \subset X^\perp$$

• L'orthogonal $X^\perp$ de n'importe quel sous-ensemble $X \subset E$ est un sous-espace vectoriel vérifiant ces propriétés :

$$X^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel} \qquad X^\perp = (\operatorname{Vect} X)^\perp \qquad X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$$

• Cette remarque, souvent exploitée d'une façon ou d'une autre, démontre que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est en somme directe avec F :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \in F \cap F^\perp &\Longrightarrow \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle = 0 && \{\boldsymbol{0}_E\} \subset F \cap F^\perp \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_E && \text{car est un sous-espace} \\ &\Longrightarrow F \cap F^\perp \subset \{\boldsymbol{0}_E\} && F \cap F^\perp = \{\boldsymbol{0}_E\} \end{aligned}$$

• La famille de vecteurs $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ de E est une famille orthogonale de vecteurs à cette condition :

$$\forall\, (i,j) \in \{1 \cdots p\}^2 \quad i \neq j \Longrightarrow \langle \boldsymbol{u}_i \mid \boldsymbol{u}_j \rangle = 0$$

Une famille de vecteurs orthogonaux peut contenir le vecteur nul $\boldsymbol{0}_E$.

• Cette condition définie que la famille $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ est orthonormale :

$$\forall\, (i,j) \in \{1 \cdots p\}^2 \quad \langle \boldsymbol{u}_i \mid \boldsymbol{u}_j \rangle = \delta_{i,j} \qquad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ces vecteurs orthogonaux sont de norme un et sont donc non nuls.

• Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
En particulier toute famille orthonormale de vecteurs est libre.
Toute famille orthonormale d'un espace vectoriel de dimension finie n contient au maximum n vecteurs.

Espaces euclidiens

La construction des produits scalaires et des formes quadratiques associées exploitent la condition $\lambda^2 \geq 0$ pour tout nombre réel λ. Les propriétés précédentes sont donc valables dans tout espace vectoriel dont le corps de base est $\mathbb{R}$.
La suite du chapitre exploite en plus les critères de dimension sur les espaces vectoriels de dimension finie.

• Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ qui est muni d'un produit scalaire $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$ associé à une norme euclidienne $||\bullet||$.

Dans la suite de ce chapitre l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un espace euclidien de dimension finie $n = \dim E$.

Bases orthonormales

• Une base orthonormale est une base qui est une famille orthonormale.

• Il suffit de prouver qu'une famille orthonormale de E possède $\dim E$ vecteurs pour montrer que cette famille est une base orthonormale.

• La base canonique $(E_k)_{k=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique :

$\langle E_i \,|\, E_j\rangle = 0\times 0+\cdots+0\times 0+0\times 1+0\times 0\cdots 0\times 0+1\times 0+0\times 0\cdots 0\times 0 = 0$

$\langle E_k \,|\, E_k\rangle = 0\times 0+\cdots+0\times 0+1\times 1+0\times 0\cdots 0\times 0 = 1 \qquad$ pour $i\neq j$

Formulaire sur les bases orthonormales

• Lorsque $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est une base orthonormale de E, l'identification des coordonnées de $\boldsymbol{v}$ grâce au calcul de $\langle \boldsymbol{u}_k \,|\, \boldsymbol{v}\rangle$ pour $k\in\{1\cdots n\}$ puis la bilinéarité du produit scalaire aboutit à ces égalités :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^n \langle \boldsymbol{u}_k \,|\, \boldsymbol{v}\rangle\, \boldsymbol{u}_k \qquad ||\boldsymbol{v}||^2 = \sum_{k=1}^n \langle \boldsymbol{u}_k \,|\, \boldsymbol{v}\rangle^2$$

• La démonstration découle de la décomposition du vecteur $\boldsymbol{v}$ sur la base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \sum_{k=1}^n \lambda_k\, \boldsymbol{u}_k\\
\langle \boldsymbol{u}_i \,|\, \boldsymbol{v}\rangle &= \sum_{k=1}^n \lambda_k\, \langle \boldsymbol{u}_i \,|\, \boldsymbol{u}_k\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k\, \delta_{i,k} = \lambda_i\\
\langle \boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{v}\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{u}_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^n \lambda_j \boldsymbol{u}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\langle \boldsymbol{u}_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^n \lambda_j \boldsymbol{u}_j \right\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i\lambda_j\, \langle \boldsymbol{u}_i \,|\, \boldsymbol{u}_j\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_i\lambda_j\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2
\end{aligned}$$

Tous les termes pour lequelles $i\neq j$ dans la double somme sont nuls, les seuls termes éventuellement non nuls sont ceux où $i=j$.

• Applicable uniquement aux bases orthonormales, ce calcul direct des coordonnées par un produit scalaire est plus rapide que la décomposition d'un vecteur obtenue par la résolution du système linéaire associé aux coordonnées.

• En notant $V\in\mathbb{R}^n$ et $W\in\mathbb{R}^n$ les coordonnées de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans une base orthonormale $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$, le produit scalaire se ramène à un produit matriciel en identifiant les nombres réels et les matrices à un seul coefficient :

$$\langle \boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{w}\rangle = \sum_{k=1}^n v_k w_k = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix} = {}^{\mathrm{t}}VW \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$$

• Les coefficients de la matrice $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ sont $a_{i,j} = \langle \boldsymbol{u}_i \,|\, f(\boldsymbol{u}_j)\rangle$.
Le coefficient en i-ème position de la colonne j est la coordonnée par rapport à $\boldsymbol{u}_i$ de $f(\boldsymbol{u}_j)$.

Construction d'une base orthonormale

• Si le vecteur $\boldsymbol{u}$ de E qui n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs de la famille orthonormale $(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^p$, alors il existe un vecteur $\boldsymbol{w}_{p+1}\in E$ pour lequel la famille $(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^{p+1}$ est orthonormale :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \sum_{k=1}^p \langle \boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{w}_k\rangle\, \boldsymbol{w}_k \in \Big(\mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^p\Big)^{\perp} \quad \boldsymbol{v}\neq \boldsymbol{0}_E \quad \boldsymbol{w}_{p+1} = \frac{1}{||\boldsymbol{v}||}\boldsymbol{v}$$

Algorithme de Schmidt

• L'algorithme de Schmidt applique par récurrence la construction précédente aux vecteurs d'une base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ de E pour obtenir une base orthonormale de E vérifiant ces conditions :

$(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^n$ est une base orthonormale de E

ET $\forall\, m\in\{1\cdots n\} \quad \mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m)$

ET $\forall\, k\in\{1\cdots n\} \quad \langle \boldsymbol{u}_k \,|\, \boldsymbol{w}_k\rangle > 0$

• Réciproquement la base orthonormale $(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^n$ obtenue à partir de la base $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ de E est l'unique base orthonormale vérifiant ces conditions :

$\forall\, m\in\{1\cdots n\} \quad \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^m = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{w}_k)_{k=1}^m$

ET $\forall\, k\in\{1\cdots n\} \quad \langle \boldsymbol{u}_k \,|\, \boldsymbol{w}_k\rangle > 0$

• L'algorithme de Schmidt associé au théorème de la base incomplète énonce que tout espace euclidien possède au moins une base orthonormale.

Exemples de bases orthonormales

• La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est, pour le produit scalaire canonique, la base orthonormale la plus très couramment utilisée.

• La base $\mathcal{B}$ intervenant dans les coordonnées polaires du plan $\mathbb{R}^2$ est une base orthonormale pour le produit scalaire usuel :

$$\boldsymbol{u}_\theta \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_\theta \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_\theta = \boldsymbol{u}_{\theta+\pi/2} \qquad \mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{v}_\theta)$$

• Les deux bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}_s$ intervenant en coordonnées cylindriques et sphériques sont des bases orthonormales de l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_c = (\boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_{\theta+\pi/2}, \boldsymbol{k}) \qquad \boldsymbol{u}_\theta = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j}$$

$$\mathcal{B}_s = (\boldsymbol{v}_{\theta,\varphi} \boldsymbol{u}_{\theta+\pi/2}, \boldsymbol{v}_{\theta,\varphi-\pi/2})$$

$$\boldsymbol{v}_{\theta,\varphi} \begin{pmatrix}\cos\theta\,\sin\varphi\\ \sin\theta\,\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_{\theta+\pi/2,\varphi} \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_{\theta,\varphi-\pi/2} \begin{pmatrix}-\cos\theta\,\cos\varphi\\ -\sin\theta\,\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

• Les deux exemples ci-dessous illustrent la méthode de Schmidt de construction de bases orthonormales.

• Ce premier exemple construit une base orthonormale $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ à partir de la base canonique pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ précédemment étudiée et non le produit scalaire canonique :

$$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + \frac{1}{2}\,(x_1 y_2 + x_2 y_1) + y_1 y_2$$

$$\left\| \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{i} \qquad ||\boldsymbol{i}|| = 1 \qquad \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{j} - \langle \boldsymbol{j} \,|\, \boldsymbol{w}_1 \rangle\, \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i}$$

$$||\boldsymbol{v}_2|| = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \boldsymbol{w}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})$$

• La méthode est la même pour construire une base orthonormale sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à trois pour le produit scalaire de Legendre ci-dessous ; l'algorithme de Schmidt détermine une base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) à partir de la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t \qquad \int_{-1}^{1} t\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^3\, \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^5\, \mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-1}^{1} 1\, \mathrm{d}t = 2 \qquad \int_{-1}^{1} t^2\, \mathrm{d}t = \frac{2}{3} \qquad \int_{-1}^{1} t^4\, \mathrm{d}t = \frac{2}{5} \qquad \int_{-1}^{1} t^6\, \mathrm{d}t = \frac{2}{7}$$

$$||X^0|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\, \mathrm{d}t} = \sqrt{2} \qquad Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_1 = X - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \,\middle|\, X \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = X \qquad ||X|| = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad Q_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, X$$

$$P_2 = X^2 - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \,\middle|\, X^2 \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}} X \,\middle|\, X^2 \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}\, X = X^2 - \frac{1}{3}$$

$$||P_2|| = \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} \qquad Q_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\big(3X^2 - 1\big)$$

$$\begin{aligned} P_3 &= X^3 - \big\langle X^3 \,|\, Q_0 \big\rangle\, Q_0 - \big\langle X^3 \,|\, Q_1 \big\rangle\, Q_1 - \big\langle X^3 \,|\, Q_2 \big\rangle\, Q_2 \\ &= X^3 - \frac{3}{2}\frac{2}{5}\, X = X^3 - \frac{3}{5}\, X \end{aligned}$$

$$||P_3|| = \sqrt{\frac{2}{7} - \frac{6}{5}\frac{2}{5} + \frac{9}{25}\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}} \qquad Q_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\big(5X^3 - 3X\big)$$

• Les polynômes orthogonaux ont de nombreuses applications, ils sont souvent associés à des intégrations par parties, des équations différentielles et des méthodes d'approximation d'intégrales.

Application aux sous-espaces orthogonaux

Dans la suite de cette partie F est un sous-espace vectoriel de E.

• L'orthogonal $F^\perp$ de F est le noyau de l'application linéaire suivante φ où $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^p$ est une base orthonormale de F :

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\boldsymbol{v} \longmapsto \begin{pmatrix}\langle \boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{v} \rangle\\ \langle \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{v} \rangle\\ \vdots\\ \langle \boldsymbol{u}_p \,|\, \boldsymbol{v} \rangle\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} p &= \dim F \leq \dim E \\ F^\perp &= \ker\varphi \\ \mathrm{Im}\,\varphi &= \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

• L'application φ est linéaire car le produit scalaire est linéaire par rapport à la deuxième variable.
Le morphisme φ est surjectif du fait que $\varphi(\boldsymbol{u}_k)$ est le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ ainsi $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}^p$.

L'égalité $F^{\perp} = \ker\varphi$ provient de ces égalités :

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \left(\operatorname{Vect}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}\right)^{\perp} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_p)^{\perp} \\ &= {\boldsymbol{u}_1}^{\perp} \cap {\boldsymbol{u}_2}^{\perp} \cap \cdots \cap {\boldsymbol{u}_p}^{\perp} = \ker\varphi \end{aligned}$$

• La propriété centrale des espaces euclidiens est un cette égalité de dimension :

$$\dim E = \dim F + \dim(F^{\perp})$$

• Ces propriétés des sous-espaces orthogonaux découlent de la relation précédente :

$$F \oplus F^{\perp} = E \qquad \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F \qquad F^{\perp} = G \iff F = G^{\perp}$$

• La première propriété repose sur le théorème du rang appliqué à l'application précédente φ définie sur l'espace vectoriel E de dimension finie :

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^p \qquad \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(\mathbb{R}^p) = p = \dim F$$

$$\dim E = \dim(\ker\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(F^{\perp}) + \dim F$$

Les deux suivantes sont des conséquences des égalités de dimension :

$$\begin{aligned} & F \cap F^{\perp} = \{\mathbf{0}_E\} \ \textsf{ET} \ \dim F + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim E \\ \Longrightarrow \quad & F \oplus F^{\perp} = E \\ & F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \ \textsf{ET} \ \dim\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = \dim E - \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim F \\ \Longrightarrow \quad & F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \end{aligned}$$

• La base $\mathcal{B}$ obtenue par réunion des bases orthonormales $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ du sous-espace F et $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{q}$ du sous-espace orthogonal $F^{\perp}$ est une base orthonormale de E :

$$\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_q) \qquad \dim E = p + q$$

Projections orthogonales

• Il existe une unique projection p sur F de direction $F^{\perp}$ qui est un sous-espace supplémentaire de F, elle est appelée projection orthogonale sur F.

• Lorsque la famille $\mathcal{B}_F = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{m}$ est une base orthonormale du sous-espace F, la formule suivante détermine la projection orthogonale sur F :

$$p(\boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{u}_k \,|\, \boldsymbol{v} \rangle \, \boldsymbol{u}_k \qquad \operatorname{Im} p = F \qquad \ker p = F^{\perp}$$

• La preuve $\operatorname{Im} p = F$ se démontre par deux inclusions : par construction $\operatorname{Im} p \subset F$, et réciproquement tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de E vérifie $p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ car $\mathcal{B}_F$ est une base orthonormale de F.

La démonstration de $\ker p = F^{\perp}$ repose sur ces équivalences, la dernière étant une conséquence que la base $\mathcal{B}_F$ de F est une famille libre de E :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \in \ker p &\iff p(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \\ &\iff \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{u}_k \,|\, \boldsymbol{v} \rangle \, \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0} \\ &\iff \left(\forall k \in \{1 \cdots m\} \quad \langle \boldsymbol{u}_k \,|\, \boldsymbol{v} \rangle \, \boldsymbol{u}_k = 0\right) \\ &\iff \boldsymbol{v} \in (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_p)^{\perp} = F^{\perp} \end{aligned}$$

• La projection $q = \mathrm{Id}_E - p$ est la projection orthogonale sur $F^{\perp}$, de direction $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$:

$$q(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - p(\boldsymbol{v}) \qquad \ker q = F = \operatorname{Im} p \qquad \ker p = F^{\perp} = \operatorname{Im} q$$

• Ainsi, dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$, la projection orthogonale q sur $F = U^{\perp}$ est obtenue à partir de la projection orthogonale p sur $\mathbb{R}U$ de direction F :

$$U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Big/ \sum_{k=1}^{n} v_k = 0 \right\} = U^{\perp} \qquad \begin{aligned} ||U|| &= \sqrt{n} \\ F^{\perp} &= \mathbb{R}U \end{aligned}$$

$$p(V) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} U \,\Big|\, V \right\rangle \frac{1}{\sqrt{n}} U = \frac{\langle U \,|\, V \rangle}{n} U$$

$$q(V) = V - \frac{\langle U \mid V \rangle}{n} U \qquad q \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} (n-1)v_1 - v_2 - \cdots - v_n \\ -v_1 + (n-1)v_2 \cdots - v_n \\ \vdots \\ -v_1 - v_2 \cdots + (n-1)v_n \end{pmatrix}$$

$$M = \mathrm{mat}(q, \mathcal{B}c, \mathcal{B}c) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice illustre la propriété $\dim F = \mathrm{tr}\, M = \mathrm{tr}\, q$ des projections sur un sous-espace vectoriel F.

• La méthode générale pour déterminer une projection consiste à décomposer un vecteur V comme la somme d'un vecteur de $\ker p$ et d'un de $\mathrm{Im}\, p$ en s'aidant par exemple de la décomposition du vecteur V sur une base bien choisie de $\ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$.

Cette méthode générale s'applique entre autres aux projections orthogonales mais demande plus de calculs que cette formules constituées de combinaisons linéaires et de produits scalaires qui convient uniquement aux projections orthogonales.

• Le théorème de Pythagore démontre que les projections orthogonales sur un sous-espace F diminuent les normes :

$$p(\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Im}\, p = F \qquad \boldsymbol{v} - p(\boldsymbol{v}) \in \ker p = F^{\perp} \qquad \langle p(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} - p(\boldsymbol{v}) \rangle = 0$$
$$||\boldsymbol{v}||^2 = ||p(\boldsymbol{v})||^2 + ||\boldsymbol{v} - p(\boldsymbol{v})||^2 \qquad ||p(\boldsymbol{v})|| \leq ||\boldsymbol{v}||^2$$

• Réciproquement une projection p diminuant les normes est une projection orthogonale :

$$\Big(\forall\, \boldsymbol{v} \in E \quad ||p(\boldsymbol{v})|| \leq ||\boldsymbol{v}||\Big) \Longrightarrow \text{la projection } p \text{ est orthogonale}$$

• La démonstration de cette réciproque repose d'abord sur la remarque suivante.

Si une expression affine $a\lambda + b$ est positive pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $a = 0$, en effet si $a \neq 0$ alors l'application $\lambda \mapsto a\lambda + b$ change de signe, et varie de $-\infty$ à $+\infty$ ou de $+\infty$ à $-\infty$.

La suite de la démonstration repose sur une inclusion et des arguments de dimension ; par ailleurs $\boldsymbol{v} \in \ker p$, $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Im}\, p$ et $p(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$:

$$||p(\boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{w})||^2 = \lambda^2 ||\boldsymbol{w}||^2 \leq ||\boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{w}||^2 = ||\boldsymbol{v}||^2 + 2\lambda \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle + \lambda^2 ||\boldsymbol{w}||^2$$
$$0 \leq ||\boldsymbol{v}||^2 + 2\lambda \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle \quad \text{donc} \quad \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle = 0 \quad \text{puis} \quad \ker p \subset (\mathrm{Im}\, p)^{\perp}$$
$$\dim(\ker p) = \dim E - \dim(\mathrm{Im}\, p) = \dim\, (\mathrm{Im}\, p)^{\perp} \quad \text{et} \quad \ker p = (\mathrm{Im}\, p)^{\perp}$$

• Les équivalences suivantes récapitulent à quelles conditions une projection p est orthogonale :

$$\begin{aligned} &\text{la projection } p \text{ est orthogonale} \\ &\Longleftrightarrow \ker p = (\mathrm{Im}\, p)^{\perp} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, p = (\ker p)^{\perp} \\ &\Longleftrightarrow \forall\, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in E^2 \quad \langle \boldsymbol{v} \mid p(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle p(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{w} \rangle \\ &\Longleftrightarrow \forall\, \boldsymbol{v} \in E \quad ||p(\boldsymbol{v})|| \leq ||\boldsymbol{v}|| \end{aligned}$$

• Par ailleurs la matrice A de l'endomorphisme f par rapport à une base orthonormale $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est symétrique si et seulement si elle vérifie cette propriété :

$$\forall\, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in E^2 \quad \langle \boldsymbol{v} \mid f(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{w} \rangle$$

La démonstration du sens direct consiste à appliquer cette égalité aux vecteurs de la base orthonormale ; le coefficient $a_{i,j}$ de A est la i-ème coordonnée du vecteur $f(\boldsymbol{u}_j)$:

$$\forall\, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in E^2 \quad \langle \boldsymbol{v} \mid f(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{w} \rangle$$
$$a_{i,j} = \langle f(\boldsymbol{u}_j) \mid \boldsymbol{u}_i \rangle = \langle \boldsymbol{u}_j \mid f(\boldsymbol{u}_i) \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}_i) \mid \boldsymbol{u}_j \rangle = a_{j,i}$$

La réciproque consiste à vérifier ces égalités en identifiant les matrices d'ordre 1 et les scalaires, et en notant V et W les coordonnées de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base orthonormale :

$$\langle \boldsymbol{v} \mid f(\boldsymbol{w}) \rangle = {}^{\mathrm{t}}V\, (AW) = {}^{\mathrm{t}}V\, {}^{\mathrm{t}}A\, W = {}^{\mathrm{t}}(AV)\, W = \langle f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{w} \rangle$$

• La matrice dans la base canonique de la projection précédente illustre cette propriété.

Étude des formes linéaires

• Les applications linéaires de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ sont appelées des formes linéaires sur l'espace vectoriel E.

• La bilinéarité du produit scalaire prouve que l'application suivante est une forme linéaire pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u} \mid \bullet \rangle : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v} \rangle \end{aligned}$$

• Réciproquement toute forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ peut s'exprimer de façon unique sous la forme d'une application $\langle \boldsymbol{u} \mid \bullet \rangle$ car l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$
$$\boldsymbol{u} \longmapsto \begin{cases} \langle \boldsymbol{u} \mid \bullet \rangle : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad \boldsymbol{v} \longmapsto \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v} \rangle \end{cases} \qquad \varphi(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u} \mid \bullet \rangle$$

• L'application linéaire φ de noyau $\ker \varphi = \{\mathbf{0}_E\}$ est injective, et est donc un isomorphisme car les deux espaces E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ sont de même dimension finie :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \in \ker \varphi &\Longrightarrow \langle \boldsymbol{u} \mid \bullet \rangle = 0_{E \to \mathbb{R}} \\ &\Longrightarrow \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \rangle = 0 \\ &\Longrightarrow ||\boldsymbol{u}|| = 0 \\ &\Longrightarrow \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E \end{aligned}$$

Matrices et automorphismes orthogonaux

Présentation des automorphismes orthogonaux

• Un endomorphisme orthogonal f est un endomorphisme qui conserve le produit scalaire, les normes et les bases orthonormales :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(E) &\Longleftrightarrow \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in E^2 \quad \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{w} \rangle = \langle f(\boldsymbol{v}) \mid f(\boldsymbol{w}) \rangle \\ &\Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{v} \in E \quad ||\boldsymbol{v}|| = ||f(\boldsymbol{v})|| \\ &\Longleftrightarrow \text{l'image par } f \text{ de n'importe quelle base orthonormale} \\ &\qquad\qquad \text{est une base orthonormale} \\ &\Longleftrightarrow \text{il existe une base orthonormale dont l'image par } f \\ &\qquad\qquad \text{est une base orthonormale} \end{aligned}$$

Le ensemble des endomorphismes orthogonaux sur E est noté $\mathcal{O}(E)$.

• La démonstration des premières équivalences repose sur les formules de polarisation et le développement des produits scalaires.
Les preuves des autres équivalences consistent à décomposer les vecteurs quelconques $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base orthonormale étudiée.

• Il suffit de montrer que l'image d'une base orthonormale est orthonormale pour prouver qu'un endomorphisme est orthogonal.
Dès qu'un endomorphisme est orthogonal l'image de n'importe quelle base orthonormale est orthonormale.

• Les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes parce

que l'image d'une base orthonormale est une base.

• L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des automorphismes orthogonaux est stable par composition et calcul de l'application réciproque, d'où ces propriétés dès que $(f, g) \in \mathcal{O}(E)^2$:

$$\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E) \qquad \mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E) \qquad g \circ f \in \mathcal{O}(E) \qquad f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$$

Ainsi $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathcal{GL}(E), \circ)$, et est appelé groupe des automorphismes orthogonaux.

• Une méthode pratique pour prouver qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est un automorphisme orthogonal consiste à vérifier que l'image de la base canonique est une base orthonormale à l'aide des produits scalaires.
Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ les vérifications à effectuer sont donc celles-ci :

$$\langle f(\boldsymbol{i}) \mid f(\boldsymbol{i}) \rangle = \langle f(\boldsymbol{j}) \mid f(\boldsymbol{j}) \rangle = \langle f(\boldsymbol{k}) \mid f(\boldsymbol{k}) \rangle = 1$$
$$\langle f(\boldsymbol{i}) \mid f(\boldsymbol{j}) \rangle = \langle f(\boldsymbol{i}) \mid f(\boldsymbol{k}) \rangle = \langle f(\boldsymbol{j}) \mid f(\boldsymbol{k}) \rangle = 0$$

Matrices orthogonales

• Ce paragraphe exploite ces conditions sur les matrices inversibles :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) &\Longleftrightarrow \big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad AB = BA = \mathbb{1}_n\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad AB = \mathbb{1}_n\big) \\ &\Longleftrightarrow \big(\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad BA = \mathbb{1}_n\big) \end{aligned}$$

• Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si son inverse est égale à sa transposée :

$$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow {}^{\mathrm{t}}A = A^{-1} \Longleftrightarrow {}^{\mathrm{t}}A\,A = \mathbb{1}_n \Longleftrightarrow A\,{}^{\mathrm{t}}A = \mathbb{1}_n$$
$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \Big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\big/\; {}^{\mathrm{t}}M\,M = \mathbb{1}_n\Big\} = \Big\{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \;\big/\; M^{-1} = {}^{\mathrm{t}}M\Big\}$$

• Toute matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est nécessairement de déterminant ± 1.
La condition n'est pas suffisante :

$$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow |\det A| = 1 \qquad \text{car } 1 = \det \mathbb{1}_n = \det({}^{\mathrm{t}}A\,A) = (\det A)^2$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \quad A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) \quad A \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$$

• Le produit matriciel ${}^{\mathrm{t}}A\,A$ énumère les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ des vecteurs colonnes de A.

• Cette méthode est la plus simple pour vérifier qu'une matrice est orthogonale :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} 2 \,\middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

• Le sous-ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ contient la matrice unité, et est stable par produit et inverse, et des matrices A et B de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifient ces propositions :

$$\mathbb{1}_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \qquad {}^{\mathrm{t}}A = A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Ainsi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe matriciel $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, et $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est appelé groupe des matrices orthogonales.

• La raison en est les propriétés des transposées des matrices :

$${}^{\mathrm{t}}\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n^{-1} \qquad ({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A)$$
$${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

• Lorsque A est la matrice de $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ de E, le coefficient $b_{i,j}$ de $B = {}^{\mathrm{t}}A\,A$ est le produit scalaire $\langle f(\boldsymbol{u}_i) \,|\, f(\boldsymbol{u}_j)\rangle$ où $(i,j) \in \{1 \cdots n\}^2$:

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\boldsymbol{u}_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\boldsymbol{u}_k \right\rangle = \langle f(\boldsymbol{u}_i) \,|\, f(\boldsymbol{u}_j)\rangle$$

• En supposant que $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est une base orthonormale, les

automorphismes orthogonaux et les matrices orthogonales sont reliés par cette équivalence :

$$f \in \mathcal{O}(E) \iff A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Cette équivalence s'applique uniquement aux bases orthonormales.

• En effet les coefficients ${}^{\mathrm{t}}A\,A$ sont les produits scalaires $\langle f(\boldsymbol{u}_i) \,|\, f(\boldsymbol{u}_j)\rangle$.

L'endomorphisme f est orthogonal si et seulement si l'image de la base orthonormale $\mathcal{B}$ est orthonormale, ce qui correspond à ces équivalences :

$$\begin{aligned} & B = {}^{\mathrm{t}}A\,A = \mathbb{1}_n \\ \iff & \big(\forall\, (i,j) \in \{1 \cdots n\}^2 \quad b_{i,j} = \langle f(\boldsymbol{u}_i) \,|\, f(\boldsymbol{u}_j)\rangle = b_{i,j} = \delta_{i,j}\big) \\ \iff & B = \mathbb{1}_n \\ \iff & A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

• En conclusion pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ l'application mat est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$ dans le groupe $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}(E) &\longrightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \end{aligned}$$

• L'application $\mathrm{mat}_{/\mathcal{O}(E)}$ est bien définie à valeur dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à cause de l'équivalence précédente.

Réciproquement toute matrice orthogonale est la matrice d'une et une seule application f qui est donc un automorphisme orthogonal pour la même raison.

Enfin l'application $\mathrm{mat}_{\mathcal{O}}$ est un morphisme de groupe pour cette raison :

$$\mathrm{mat}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathrm{mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \times \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

Groupe spécial orthogonal

• L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ qui est appelé groupe spécial des matrices orthogonal :

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \big\{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \;\big/\; \det M = 1\big\} \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

• Le déterminant de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie ; le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(E)$ est défini de façon analogue au groupe $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{SO}(E) = \big\{f \in \mathcal{O}(E) \;\big/\; \det f = 1\big\} \subset \mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$$

• Les automorphismes du groupe spécial orthogonal sont caractérisés par leur matrice dans une base $\mathcal{B}$ orthonormale :

$$f \in \mathcal{SO}(E) \Longleftrightarrow \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

Cette équivalence est uniquement valable dans les bases orthonormales.

• Les automorphismes orthogonaux de $\mathcal{SO}(E)$ sont dits directs, et ceux de $\mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$, indirects.

• L'ensemble $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$.
La structure $(\mathcal{SO}(E), \circ)$ forme un groupe.
Les groupes $(\mathcal{SO}(E), \circ)$ et $(\S_n, \times)$ sont isomorphes par l'application mat une fois fixée une baseorthonormale $\mathcal{B}$.

• Les méthodes de démonstration sont les mêmes.
Le sous-ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et inverse, car les déterminants de l'inverse ou du produit de matrices de déterminant 1 sont de valeur 1.
De même le sous-ensemble $\mathcal{SO}(E)$ est stable par produit et inverse car le déterminant des applications linéaires vérifie les mêmes propriétés d'inverse et de produit que le déterminant des matrices.

• La matrice R_θ est orthogonale directe, et la matrice S_θ est orthogonale indirecte :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2 \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$$

Matrices de passage orthogonales

• Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est une base orthonormale de E, et si $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}'_k)_{k=1}^n$ est une base quelconque, alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ vérifie cette équivalence :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \text{la base } \mathcal{B}' \text{ est orthonormale}$$

• Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orientées dans le même sens si et seulement si $\det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} > 0$.
La relation « être orientée dans le même sens » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases de E.

• La base $\mathcal{B}$ est orientée dans le même sens que $\mathcal{B}$ car $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = \mathbb{1}_n$ de déterminant $1 > 0$.
Si la base $\mathcal{B}$ est orientée dans le même sens que $\mathcal{B}'$ alors $\det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} > 0$

et ces égalités justifient que $\mathcal{B}'$ est orientée dans le même sens que $\mathcal{B}$:

$$\det P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \det P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \frac{1}{\det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}} > 0$$

Un argument sur le produit justifie la transitivité de la relation :

$$\det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} > 0 \text{ ET } \det P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} > 0$$
$$\Longrightarrow \det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}) = \det P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \det P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}) > 0$$

• Par exemple les deux bases $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ et $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u})$ sont orientées dans le même sens :

$$\det P_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\to(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

• La base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est directe si et seulement si elle est orientée dans le même sens que la base canonique $\mathcal{B}c$.

• La base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale et directe si et seulement si $P_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

• Les bases orthonormales directes jouent un rôle particulier en géométrie de l'espace.

Propriétés des automorphismes orthogonaux

• La restriction d'un automorphisme orthogonal f de E à un sous-espace stable F de E est un automorphisme orthogonal :

$$f(F) \subset F \text{ ET } f \in \mathcal{O}(E) \Longrightarrow f_{/F} \in O(F)$$

• La stabilité de F par f justifie que f est un endomorphisme sur F et donc $f_{/F} \in \mathcal{L}(F)$. Par ailleurs $f \in \mathcal{O}(E)$ entraine que f conserve le produit scalaire sur E, donc sur $F \subset E$, et en conclusion $f_{/F} \in \mathcal{O}(F)$
En conclusion $f_{/F} \in \mathcal{O}(E)$ donc $f_{/F}$ est un automorphisme sur F et $f(F) = F$.

• Tout sous-espace F stable par un automorphisme orthogonal f vérifie ces propriétés :

$$f_{/F} \in \mathcal{O}(F) \qquad f(F^\perp) \subset F^\perp \qquad f_{/F^\perp} \in O(F^\perp) \qquad f(F^\perp) = F^\perp$$

• Si $\boldsymbol{v} \in F$ et $\boldsymbol{w} \in F^\perp$ alors il existe $\boldsymbol{u} \in F$ vérifiant $v = f(\boldsymbol{u})$ car $f_{/F} \in \mathcal{O}(F) \subset \mathcal{GL}(F)$. Ces égalités valable pour tout $\boldsymbol{v} \in F$

justifient successivement $f(\boldsymbol{w}) \in F^{\perp}$ puis que $F^{\perp}$ est stable f, et enfin $f_{/F^{\perp}} \in \mathcal{O}(F^{\perp})$:

$$\langle \boldsymbol{v} \mid f(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle f(\boldsymbol{u} \mid f(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \rangle = 0$$

• Les seules valeurs propres possibles d'un automorphisme orthogonal $f \in \mathcal{O}(E)$ sont ± 1 ; l'existence d'un tel vecteur $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}_E$ énonce cette conséquence :

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v} \text{ ET } \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}_E \Longrightarrow |\lambda| = 1$$

• La démonstration repose sur cette égalité où $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}_E$ et $||\boldsymbol{v}|| \neq 0$:

$$||\boldsymbol{v}||^2 = \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{v}) \mid f(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \lambda \boldsymbol{v} \mid \lambda \boldsymbol{v} \rangle = \lambda^2 \langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle = \lambda^2 ||\boldsymbol{v}||^2$$

• Lorsque F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E, la symétrie s par rapport à F de direction G est dite symétrie orthogonale si et seulement si $F = G^{\perp}$, c'est-à-dire $G = F^{\perp}$:

la symétrie s est orthogonale $\Longleftrightarrow F = G^{\perp} \Longleftrightarrow G = F^{\perp} \Longleftrightarrow s \in \mathcal{O}(E)$

$$F = \left\{ \boldsymbol{w} \in E \;/\; s(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \right\} = E_1(s)$$
$$G = \left\{ \boldsymbol{w} \in E \;/\; s(\boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{w} \right\} = E_{-1}(s)$$

• La matrice A d'une symétrie orthogonale s — c'est-à-dire $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et $s \in \mathcal{O}(E)$ — dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$ est symétrique — c'est-à-dire ${}^{\mathrm{t}}A = A$ — :

$$s \circ s = \mathrm{Id}_E \qquad A = \mathrm{mat}(s, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$
$$s \in \mathcal{O}(E) \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_{i,j} &= \langle \boldsymbol{u}_i \mid s(\boldsymbol{u}_j) \rangle = \langle s(s(\boldsymbol{u}_i) \mid s(\boldsymbol{u}_j) \rangle \\ &= \langle s(\boldsymbol{u}_i) \mid \boldsymbol{u}_j \rangle = \langle \boldsymbol{u}_j \mid s(\boldsymbol{u}_i) \rangle = a_{j,i} \end{aligned}$$

• Lorsque $\boldsymbol{u}$ est un vecteur unitaire, c'est-à-dire $||\boldsymbol{u}|| = 1$, l'application suivante est appelée reflexion d'axe $\mathbb{R}\boldsymbol{u}$; la matrice de la réflexion par rapport à la base obtenue par réunion d'une base orthonormale de $\boldsymbol{u}^{\perp}$ et du vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ est celle-ci :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \boldsymbol{v} - 2 \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u} \end{aligned} \qquad \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une réflexion est un automorphisme orthogonal indirect qui est une

symétrie orthogonale par rapport à $\boldsymbol{u}^{\perp}$ de direction $\mathbb{R}\boldsymbol{u}$.

• Une projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal sauf dans le cas particulier où $p = \mathrm{Id}_E$.

Automorphismes orthogonaux du plan

Dans ce paragraphe P est un plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormale de référence $\mathcal{B}c = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$.

• Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont définies à partir de R_α et de S_α :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \left\{ R_\alpha \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} & \mathcal{S} &= \left\{ S_\alpha \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ R_\alpha \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \alpha \in]-\pi, \pi] \right\} & &= \left\{ S_\alpha \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \alpha \in]-\pi, \pi] \right\} \end{aligned}$$

• Les premières propriétés des automorphismes orthogonaux du plan sont les suivantes :

$$f \in \mathcal{SO}(P) \Longleftrightarrow \left(\exists\, \alpha \in]-\pi, \pi] \quad \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}c, \mathcal{B}c) = R_\alpha \right)$$
$$f \in \mathcal{O}(P) \setminus \mathcal{SO}(P) \Longleftrightarrow \left(\exists\, \alpha \in]-\pi, \pi] \quad \mathrm{mat}(f, \mathcal{B}c, \mathcal{B}c) = S_\alpha \right)$$
$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \quad \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{R} \qquad \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \quad \mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$$

Les automorphismes directs de $\mathcal{SO}(P)$ sont appelés rotations du plan, et les matrices $R_\alpha \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, des matrices de rotation.

• La norme des deux vecteurs-colonnes d'une telle matrice est 1 ; une matrice orthogonale est donc de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire des deux colonnes est nul :
$\langle f(\boldsymbol{i}) \mid f(\boldsymbol{j}) \rangle = \langle \boldsymbol{i} \mid \boldsymbol{j} \rangle = 0 \quad 0 = \cos\alpha \, \cos\beta + \sin\alpha \, \sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$
Deux cas sont possibles selon que $\alpha - \beta \in \pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$ ou $\alpha - \beta \in -\pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$.
La matrice obtenue est dans l'un et l'autre cas est R_α et S_α.
Réciproquement les matrices R_α et S_α sont des matrices orthogonales, de déterminant respectivement $+1$ et -1.

• Les opérations sur les matrices orthogonales du plan sont les suivantes :

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} \qquad R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta} \qquad R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$$
$$S_\alpha R_\beta = S_{\alpha-\beta} \qquad S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta} \qquad S_\alpha^{-1} = S_\alpha$$

• Ces égalités reposent sur formules d'addition en trigonométrie.

• Les groupes $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ et $(\mathcal{SO}(P), \circ)$ sont commutatifs.

• La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}c$ à une base orthonormale $\mathcal{B}$ est de la forme R_α ou S_α suivant que la base $\mathcal{B}$ est directe ou non.

• La matrice dans n'importe quelle base orthonormale directe d'une rotation r du plan est la même, notée R_α, et α est appelé angle de la rotation r :
Dans le cas où la base orthonormale $\mathcal{B}$ est indirecte la matrice de r est $R_{-\alpha}$.

• Pour tout automorphisme orthogonal indirect s du plan, il existe deux bases orthonormales directes $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et $(-\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v})$ dans laquelle la matrice de s est la suivante :

$$\operatorname{mat}(s, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} E_1(s) &= \left\{\boldsymbol{w} \in E \;\big/\; s_\alpha(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}\right\} \\ E_{-1}(s) &= \left\{\boldsymbol{w} \in E \;\big/\; s_\alpha(\boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{w}\right\} \end{aligned}$$

$$E_1(s) = \mathbb{R}\boldsymbol{u} \qquad E_{-1}(s) = \mathbb{R}\boldsymbol{v} = E_1{}^\perp$$

• Pour cela il suffit de rechercher à l'aide de matrices de passage une condition sur la base orthonormal $\mathcal{B}$ pour que la matrice de s dans $\mathcal{B}$ soit celle-ci. Ces matrices de passage sont par hypothèses des matrices orthogonales directes car la base recherchée est orthonormale et directe :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}}^{-1} S_t heta P_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}} = {}^{\mathrm{t}}R_\alpha S_\theta R_\alpha = R_{-\alpha} S_{\theta-\alpha} = S_{\theta-2\alpha}$$

La condition est donc $\cos(\theta - 2\alpha) = 1$, c'est-à-dire $-\theta + 2\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$, $2\alpha \in \theta + 2\pi\mathbb{Z}$, les deux valeurs possibles de α définissant la base recherchée sont $a\alpha = \theta/2$ ou $\alpha = \pi + \theta/2$.

Automorphismes orthogonaux de l'espace

Ce paragraphe étudie les automorphismes orthogonaux de l'espace $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique. La base canonique de* E *est notée* $\mathcal{B}c = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ *et* $\mathcal{B}$ *est une base orthonormale directe de* E. En outre l'automorphisme f est direct si $\det A = 1$, indirect sinon.

• Le déterminant de trois vecteurs U, V et W de $\mathbb{R}^3$ est indépendant de la base orthonormale directe choisie pour les calculs.
Les coordonnées des vecteurs U, V et W dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ sont notées U', V' et W'. Avec ces hypothèses un calcul matriciel sur les colonnes de ce produit justifie l'égalité des déterminants :

$$P = P_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \qquad PU' = U \qquad PV' = V \qquad PW' = W$$
$$\begin{aligned} \det[U, V, W] &= \det[PU', PV', PW'] = \det(P[U', V', W']) \\ &= \det P \, \det[U, V, W] = \det[U, V, W] \end{aligned}$$

• La propriété suivante exploite le fait que tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire possède au moins une valeur propre car le développement de ce déterminant est un polynôme réel de degré impair qui nécessairement change de signe et possède donc une racine réelle :

$$P(\lambda) = \det(f - \lambda \operatorname{Id}_E) = \det(A - \lambda \mathbb{1}_n)$$
$$\lim_{\lambda\to-\infty} P(\lambda) = +\infty \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} P(\lambda) = -\infty \qquad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \quad P(\lambda) = 0$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) = 0 &\iff \det(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \notin \mathcal{GL}(E) \\ &\iff \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{\mathbf{0}_E\} \\ &\iff \big(\exists\, u \in E \quad f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} \text{ ET } \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}_E \end{aligned}$$

• Tout automorphisme orthogonal de l'espace $\mathbb{R}^3$ possède nécessairement une valeur propre λ et un vecteur propre $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}_E$ vérifiant $f(\boldsymbol{v}) - \lambda \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E$; une propriété précédente démontre que seuls les cas $\lambda = \pm 1$ sont possibles :

$$\exists\, \boldsymbol{u} \in E \quad \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0} \text{ ET } f(\boldsymbol{u}) = \pm \boldsymbol{u}$$

• L'étude des deux cas possibles $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ prouve que pour tout automorphisme orthogonal direct il existe une base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ dans laquelle la matrice de f est la suivante :

$$\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

$$\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}' = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})$$

• Le lemme précédent justifie l'existence d'un vecteur $\widetilde{\boldsymbol{u}} \neq \mathbf{0}_E$ vérifiant $f(\widetilde{\boldsymbol{u}'}) = \pm\widetilde{\boldsymbol{u}'}$. Quitte à remplacer $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ par $\boldsymbol{u}' = (1/||\widetilde{\boldsymbol{u}}||)\,\widetilde{\boldsymbol{u}}$ ce vecteur peut être considéré comme unitaire :

$$||\boldsymbol{u}'|| = 1 \qquad f(\boldsymbol{u}') = f\Big(\frac{1}{||\widetilde{\boldsymbol{u}}||}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}\Big) = \frac{1}{||\widetilde{\boldsymbol{u}}||} f(\widetilde{\boldsymbol{u}}) = \pm\boldsymbol{u}'$$

Les deux cas possibles sont $f(\boldsymbol{u}') = \boldsymbol{u}'$ et $f(\boldsymbol{u}') = -\boldsymbol{u}'$.
Le sous-espace $\boldsymbol{u}'^{\perp}$ est un plan vectoriel. La suite de la démonstration repose sur le fait que la restriction $f_{/\boldsymbol{u}'^{\perp}}$ est un automorphisme orthogonal du plan $\boldsymbol{u}'^{\perp}$; donc il existe une base orthonormale $(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')$ de $\boldsymbol{u}'^{\perp}$ dans laquelle la matrice de la restriction $f_{/\boldsymbol{u}'^{\perp}}$ est R_θ où S_1.
Les familles $(\pm\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')$ constituent des bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$, et l'une des deux est directe.
La suite de la démonstration suppose que la base $(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')$ est directe, quitte à remplacer $\boldsymbol{u}'$ par $-\boldsymbol{u}'$.
La matrice de f dans cette base orthonormale est l'une des quatre suivantes, selon que $f(\boldsymbol{u}') = \boldsymbol{u}'$ ou $f(\boldsymbol{u}') = -\boldsymbol{u}'$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les matrices B et C ne conviennent pas car de déterminant -1 alors que $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ par hypothèse.
La première matrice A est de la forme demandée, et un changement de base orthonormale directe transforme la matrice D en la matrice recherchée :

$$\mathrm{mat}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}')$$

$$f(\boldsymbol{u}') = -\boldsymbol{u}' \quad f(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{v}' \quad f(\boldsymbol{w}') = -\boldsymbol{w}' \qquad \mathcal{B} = (\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u}') = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

$$\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & \sin\pi \\ 0 & -\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

En conclusion pour tout automorphisme orthogonal f il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans cette base est de la forme recherchée :

$$\mathrm{mat}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Réciproquement ces matrices sont bien orthogonales et directes.

• La valeur de θ ne dépend pas du choix des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base orthomormée directe $\mathcal{B}$.
Les deux choix $\pm\boldsymbol{u}$ sont possibles comme premier vecteur de $\mathcal{B}$, le passage de l'un à l'autre change necessite de remplacer la base $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ de $u^{\perp}$ en $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$ ce qui change l'orientation du plan $\boldsymbol{u}^{\perp}$ et remplace R_θ en $R_{-\theta}$.

• Il est possible de déterminer directement le signe de $\sin\theta$ à partir du fait que le déterminant de trois vecteurs est indépendant de la base orthonormale directe de référence $\mathcal{B}$.
Plus précisément soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur non-colinéaire à $\boldsymbol{u}$. Le déterminant suivant est le même dans la base canonique $\mathcal{B}c$ et dans la base $\mathcal{B}$, et est du signe de $\sin\theta$ car $(\beta,\gamma) \neq (0,0)$ et $\beta^2+\gamma^2 > 0$. Les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ dans les bases $\mathcal{B}c$ et $\mathcal{B}$ sont notées U et U', celles de $\boldsymbol{x}$, X et X', et celles de $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$, Y et Y' :

$$P = P_{\mathcal{B}c\to\mathcal{B}} \qquad X' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\beta,\gamma) \neq (0,0) \qquad U' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \cos\theta\,\beta - \sin\theta\,\gamma \\ \sin\theta\,\beta - \sin\theta\,\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})] = \det[U, X, Y] &= \det[U', X', Y'] \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta & \cos\theta\,\beta - \sin\theta\,\gamma \\ 0 & \gamma & \sin\theta\,\beta + \cos\theta\,\gamma \end{pmatrix} \\ &= \beta^2 \sin\theta + \beta\gamma \cos\theta_\beta\gamma \cos\theta + \gamma^2 \sin\theta = (\beta^2 + \gamma^2)\sin\theta \end{aligned}$$

• La valeur de θ peut être obtenue modulo 2π à partir de $\cos\theta$ et du signe de $\sin\theta$ où U est le vecteur-coordonnée de $\boldsymbol{u}$, et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur de coordonnées X non colinéaire à $\boldsymbol{u}$:

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

$\sin\theta$ est du signe de $\det_{\mathcal{B}c}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = \det[U, X, AX]$

• Si $f \neq \mathrm{Id}_E$, l'espace des vecteurs invariants $E_1(f) = \mathbb{R}\boldsymbol{u}$ est de dimension un ; le vecteur $\boldsymbol{u}$ est appelé axe de la rotation f.

• Le sous-espace $E_1(f)$ est stable par $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$; Si $\dim E_1(f) = 2$ alors $E_1(f)^\perp$ est un sous-espace stable par f de dimension 1, et de la forme $E_1(f)^\perp = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$. Ainsi $f(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}\boldsymbol{v}$ et $f(\boldsymbol{v})$ est de la forme $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$. Les seules possibilités sont $\lambda = \pm 1$, et la matrice de f dans un base orthonormale directe construite à partir d'une base orthonormale de $E_(f)$ et de $\boldsymbol{v}$ est l'une des matrices suivantes. La première solution est impossible car $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$, et $\det f = 1$, la seule solution possible est donc $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det B = 1 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = -1$$

• Une méthode pratique pour calculer l'axe d'une rotation consiste donc à chercher un vecteur non nul du noyau $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ en résolvant le système linéaire $f(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$.
Un vecteur $\boldsymbol{v}$ de la base orthonormale directe est donc un vecteur unitaire vérifiant $\langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v} \rangle = 0$.
Le vecteur $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ construit le troisème vecteur de la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

• Sauf lorsque l'angle de la rotation est $\pm\pi$, l'axe de la rotation peut être obtenu à partir de $\boldsymbol{x} \wedge f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}_E$, et dans ce cas $\sin\theta > 0$.

Exemple récapitulatif

• Une vérification par les produits scalaires des vecteurs colonnes justifie que la matrice suivante est orthogonale, elle est de déterminant 1, et donc correspond, par définition, à une rotation de l'espace :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'axe de la rotation est obtenu en résolvant l'équation $AX = X$, c'est-à-dire $(A - \mathbb{1}_3)X = 0$, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}U$.
L'angle θ de la rotation vérifie $2\cos\theta + 1 = 0$ et $\theta = \pm 2\pi/3$.
Pour un vecteur X non colinéaire à l'axe U, par exemple le premier vecteur de la base canonique, le signe de $\sin\theta$ du signe de ce déterminant négatif et $\theta = -2\pi/3$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$