INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Le but de ce chapitre est de définir les intégrales des applications continues sur un segment $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$ ni vide ni réduit à un point où $a < b$. Cette construction — appelée méthode de Riemann — se fait en trois étapes, d'abord pour les applications en escalier, puis les applications continues et enfin les applications continues par morceaux.

• Une subdivision d'un segment $[a,\, b]$ est une famille finie $(\alpha_k)_{k=0}^n$ strictement croissante de $[a,\, b]$ vérifiant $a = \alpha_0$ et $b = \alpha_n$:

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = b$$

Les intervalles $]\alpha_{k-1},\, \alpha_k[$ où $k \in \{1 \cdots n\}$ sont appelés intervalles élémentaires de la subdivision.

• Une subdivision $(\beta_j)_{j=0}^p$ est plus fine qu'une subdivision $(\alpha_i)_{i=0}^n$ lorsque tous les termes α_i sont des termes de $(\beta_j)_{j=0}^p$:

$$\big\{\alpha_i \ / \ i \in \{0 \cdots n\}\big\} \subset \big\{\beta_j \ / \ j \in \{0 \cdots p\}\big\} \subset [a,\, b]$$
$$\forall\, j \in \{1 \cdots p\} \quad \exists\, i \in \{1 \cdots n\} \quad]\beta_{j-1},\, \beta_j[\ \subset\ ]\alpha_{i-1},\, \alpha_i[$$

Dans ce cas tout intervalle élémentaire $[\beta_{j-1},\, \beta_j]$ est inclus dans l'un des intervalles $[\alpha_{i-1},\, \alpha_i]$.

• La réunion de deux subdivisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{i=0}^p$ définit une subdivision $(\gamma_k)_{k=0}^q$ plus fine que les subdivisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{j=0}^p$.
Les intervalles élémentaires $[\gamma_{k-1},\, \gamma_k]$ sont tous inclus dans des intervalles élémentaires des subdivisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{i=0}^p$:

$$\big\{\gamma_k \ / \ 0 \leq k \leq q\big\} = \big\{\alpha_i \ / \ 0 \leq i \leq n\big\} \cup \big\{\beta_j \ / \ 0 \leq j \leq p\big\}$$
$$\forall\, k \in \{1 \cdots q\} \quad \exists\, (i, j) \in \{1 \cdots n\} \times \{1 \cdots p\} \qquad [\gamma_{k-1},\, \gamma_k] \subset [\alpha_{i-1},\, \alpha_i] \ \text{ET}\ [\gamma_{k-1},\, \gamma_k] \subset [\beta_{j-1},\, \beta_j]$$

Cas des applications en escalier

L'espace vectoriel des applications en escalier

• Une application f sur le segment $[a,\, b]$ est dite en escalier lorsqu'il existe une subdivision $(\alpha_k)_{k=0}^n$ de $[a,\, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]\alpha_{k-1},\, \alpha_k[$ est constante :

$$\forall\, k \in \{1 \cdots n\} \quad f_{/]\alpha_{k-1},\alpha_k[} \text{ est constante}$$

Une subdivision $(\beta_k)_{k=1}^p$ est dite compatible avec l'application en escalier f lorsque chaque restriction de f à $]\beta_{k-1},\, \beta_k[$ est constante.

• Les applications constantes sont des applications en escalier dont une subdivision compatible est $(\alpha_0, \alpha_1) = (a, b)$.

• Toute subdivision plus fine qu'une subdivision compatible avec l'application en escalier f est aussi compatible avec f.

• La combinaison linéaire de deux applications f et g en escalier de subdivision $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{j=0}^p$ est une application en escalier dont une subdivision compatible $(\gamma_k)_{k=0}^q$ est obtenue par la réunion des subdivisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{j=0}^p$.

• L'application $\lambda f + \mu g$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ est constante sur chaque intervalle élémentaire ouvert $]\gamma_{k-1},\, \gamma_k[$ car celui-ci est inclus dans des intervalles élémentaires des subdivisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{j=0}^p$ sur lesquels les applications f et g sont constantes.

• L'ensemble $\mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R})$ des applications en escalier sur $[a,\, b]$ a une structure d'espace vectoriel.

• L'ensemble $\mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R})$ est par construction un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{[a,\, b]}$.
D'une part $\mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R})$ contient les applications constantes sur $[a,\, b]$ et en particulier l'application nulle, et d'autre part est stable par combinaisons linéaires.
Ces raisons font que $\mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R})$ forme un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{[a,\, b]}$ des applications de $[a,\, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Définition de l'intégrale

• L'intégrale d'une application en escalier f de subdivision $(\alpha_k)_{k=0}^n$ est définie comme étant la somme algébrique de l'aire des rectangles délimités par le graphe de f, l'axe horizontal et les droites verticales d'abcisse α_k :

$$\int_a^{b} \!\!{}^{\mathcal{E}}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, f\Big(\frac{\alpha_{k-1} + \alpha_k}{2}\Big)$$

$$f\Big(\frac{\alpha_{k-1} + \alpha_k}{2}\Big) \text{ est la valeur de } f \text{ sur l'intervalle }]\alpha_{k-1},\, \alpha_k[$$

La valeur de l'intégrale est indépendante de la subdivision associée à f.

• Si les subdvisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{j=0}^p$ sont compatibles de f, alors la subdivision-réunion $(\gamma_k)_{k=0}^p$ est aussi compatible avec f et les termes de la somme associée à la subdivision $(\gamma_k)_{k=1}^q$ peuvent être regroupés pour obtenir les sommes relatives aux subdivisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{j=0}^p$.
Dans cette démonstration $]\alpha_{i-1},\, \alpha_i[$ est un intervalle élémentaire quelconque de la subdivision $(\alpha_i)_{i=0}^n$ dont les extrémités vérifient $\alpha_{i-1} = \gamma_u$ et $\alpha_i = \gamma_v$; l'application f est constante sur l'intervalle $]\alpha_{i-1},\, \alpha_i[$ d'où

les égalités suivantes :

$$\alpha_{i-1} = \gamma_u < \gamma_{u+1} < \cdots < \gamma_{v-1} < \gamma_v = \alpha_i$$

$$f\Big(\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}\Big) = f\Big(\frac{\gamma_u+\gamma_{u+1}}{2}\Big) = \cdots = f\Big(\frac{\gamma_{v-1}+\gamma_v}{2}\Big)$$

$$(\alpha_i - \alpha_{i-1})\, f\Big(\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}\Big) = \sum_{k=u+1}^{v} (\gamma_k - \gamma_{k-1})\, f\Big(\frac{\gamma_{k-1}+\gamma_k}{2}\Big)$$

Une somme sur les n intervalles élémentaires de $(\alpha_i)_{i=0}^n$ termine la démonstration car elle fait intervenir une et une seule fois tous les intervalles élémentaires de $(\gamma_k)_{k=0}^q$:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})\, f\Big(\frac{\alpha_{i-1}+\alpha_i}{2}\Big) = \sum_{k=1}^{q}(\gamma_k - \gamma_{k-1})\, f\Big(\frac{\gamma_{k-1}+\gamma_k}{2}\Big)$$

Ce résultat appliqué à la subdivision $(\beta_j)_{j=0}^p$ prouve d'autre part l'égalité des sommes pour les subdivisions $(\beta_j)_{j=0}^p$ et $(\gamma_k)_{k=0}^q$.
La transitivité de l'égalité démontre donc que l'intégrale définie à partir des subdivisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{j=0}^p$ sont égales, et que la valeur de l'intégrale est indépendante de la subdivision compatible choisie.

• L'intégrale de f est indépendante de la valeur de f aux points de subdivision.
Modifier la valeur de f en un nombre fini de points entraîne éventuellement un autre choix de subdivision, mais ne change pas la valeur de l'intégrale.

• La valeur absolue $|f|$ d'une application f en escalier est une application en escalier dont des subdivisions compatibles sont celles de f.

Propriétés élémentaires de l'intégrale

L'intégrale est linéaire

• L'intégrale des applications en escalier est linéaire :

$$\int_a^b \!\mathcal{E}\, (\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b \!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b \!\mathcal{E}\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

où $(f, g) \in \mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R})^2$

• Si les subdivisions $(\alpha_i)_{i=0}^n$ et $(\beta_j)_{j=0}^p$ sont compatibles avec f et g alors la subdivision réunion est compatible avec $\lambda f + \mu g$, et est aussi compatible avec f, car plus fine que $(\alpha_i)_{i=0}^n$, et et g, car plus fine que $(\beta_j)_{j=0}^p$.
Les règles usuelles d'associativité et de distributivité sur les sommes aboutissent à ces égalités :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \!\mathcal{E}\, (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{q}(\gamma_k - \gamma_{k-1})\, \Big(\lambda\, f\Big(\frac{\gamma_{k-1}+\gamma_k}{2}\Big) + \mu\, g\Big(\frac{\gamma_{k-1}+\gamma_k}{2}\Big)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{q}(\gamma_k - \gamma_{k-1})\, \lambda\, f\Big(\frac{\gamma_{k-1}+\gamma_k}{2}\Big) + (\gamma_k - \gamma_{k-1})\, \mu\, g\Big(\frac{\gamma_{k-1}+\gamma_k}{2}\Big) \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{q}(\gamma_k - \gamma_{k-1})\, f\Big(\frac{\gamma_{k-1}+\gamma_k}{2}\Big) + \mu \sum_{k=1}^{q}(\gamma_k - \gamma_{k-1})\, g\Big(\frac{\gamma_{k-1}+\gamma_k}{2}\Big) \\
&= \lambda \int_a^b \!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b \!\mathcal{E}\, g(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

L'intégrale est additive

• L'intégrale des applications en escalier est additive.
Si l'application f est en escalier et si $c \in]a,\, b[$ alors les restrictions $f_{/[a,\, c]}$ et $f_{/[c,\, b]}$ sont en escalier et les intégrales vérifient ces propriétés :

$$\int_a^b \!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c \!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c \!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

• Il suffit d'étudier la somme correspondant à cette intégrale en ajoutant éventuellement le point c à une subdivision compatible avec f. Cette nouvelle subdivision est notée $(\alpha_k)_{k=0}^n$ et $c = \alpha_p$.
L'associativité de la somme aboutit à l'égalité recherchée :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k-1}) f\Big(\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_k}{2}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{p}(\alpha_k - \alpha_{k-1}) f\Big(\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_k}{2}\Big) + \sum_{k=p+1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k-1}) f\Big(\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_k}{2}\Big) \\
&= \int_a^c \!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b \!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La deuxième somme correspond à l'intégrale d'une application en escalier sur $[c,\, b]$ par décalage de p des indices dans la famille $(\alpha_k)_{k=p}^n$.

L'intégrale est positive

• L'intégrale d'une application en escalier f à valeurs positives sur le segment $[a,\, b]$ est positive :

$$a \leq b \text{ ET } f \in \mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R}) \text{ ET } \big(\forall\, t \in [a,\, b] \quad f(t) \geq 0\big) \Longrightarrow \int_a^b\!\!\varepsilon\; f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

• L'intégrale reste positive si l'application f a un nombre fini de termes négatifs, à des points de subdivision.

• Cette intégrale est une somme de produits dont tous les termes sont positifs.

$$\int_a^b\!\!\varepsilon\; f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) f\big(\frac{\alpha_{k-1}+\alpha_k}{2}\big) \geq 0$$

• Toutes applications f et g de $\mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R})$ vérifient ces propriétés :

$$a \leq b \text{ ET } \big(\forall\, t \in [a,\, b] \quad f(t) \leq g(t)\big) \Longrightarrow \int_a^b\!\!\varepsilon\; f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b\!\!\varepsilon\; g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\left|\int_a^b\!\!\varepsilon\; f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b\!\!\varepsilon\; |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

• La première propriété repose sur la linéarité de l'intégrale appliquée à l'application $g - f$ à valeurs positives.
La seconde est due à l'encadrement $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ vérifié pour tout $t \in [a,\, b]$ par les applications en escalier f, $-f$ et $|f|$.

Cas des applications continues

Limite uniforme

• Le théorème de Heine affirme que toute application continue f sur un segment $[a,\, b]$ est uniformément continue :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, (x, y) \in [a,\, b]^2 \quad |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

• Pour toute application f continue sur un segment, il existe une application en escalier φ qui approche f à $\delta > 0$ près, autrement dit :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}([a,\, b], \mathbb{R}) \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, \varphi \in \mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R}) \quad \forall\, t \in [a,\, b] \quad |f(t) - \varphi(t)| \leq \delta$$

• La construction de l'application en escalier φ et de sa subdivision reposent sur l'uniforme continuité de l'application f et dépendent de η :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, (x, y) \in [a,\, b]^2 \quad |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soient $f \in \mathcal{C}([a,\, b], \mathbb{R})$ et $\delta > 0$. L'uniforme continuité de f appliquée à $\varepsilon = \delta > 0$ définit une valeur de $\eta > 0$ possible associée à $\varepsilon > 0$.
Cette valeur de $\eta > 0$ permet de construire une subdivision $(\alpha_k)_{k=0}^n$ régulière de $[a,\, b]$ par $\alpha_k = a + kh$ pour laquelle la largeur de chaque intervalle élémentaire est inférieure ou égale à 2η :

$$n = \mathrm{E}\big(\frac{b-a}{2\eta}\big) + 1 \geq \frac{b-a}{2\eta} \qquad 0 < h = \frac{b-a}{n} \leq 2\eta$$

L'application en escalier φ est définie par sa restriction sur chacun des sous-intervalles $[\alpha_{k-1},\, \alpha_k[$ où $k \in \{1 \cdots n\}$ sur lequel sa valeur est celle de f au point milieu :

$$\varphi_{/[\alpha_{k-1},\, \alpha_k[} = f(u_k) \quad \text{avec } u_k = \frac{\alpha_{k-1}+\alpha_k}{2} \qquad \varphi(b) = f(b)$$

L'uniforme continuité de f permet ensuite de vérifier que l'application φ approche f à δ près par ces majorations valables pour tout $t \in [a,\, b]$:

$$\forall\, t \in [a,\, b] \quad \exists\, k \in \{1 \cdots n\} \quad t \in [\alpha_{k-1},\, \alpha_k[\text{ OU } t = b$$

$$\begin{aligned}
t \in [\alpha_{k-1},\, \alpha_k[&\Longrightarrow \alpha_{k-1} \leq t \leq \alpha_k \\
&\Longrightarrow \alpha_{k-1} - u_k \leq t - u_k \leq \alpha_k - u_k \\
&\Longrightarrow \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{2} \leq t - u_k \leq \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{2} \\
&\Longrightarrow |t - u_k| \leq \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{2} \leq \eta \\
&\Longrightarrow |f(t) - \varphi(t)| = |f(t) - f(u_k)| \leq \varepsilon = \delta
\end{aligned}$$

L'application en escalier φ définie ainsi approche f à δ près et convient.

• Pour tout $\delta > 0$ il existe deux applications en escalier $\widetilde{\psi}$ et $\widehat{\psi}$ encadrant l'application continue f à δ près par défaut et par excès :

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{\psi}, \widehat{\psi}) \in \mathcal{E}([a,\, b], \mathbb{R})^2 \\
\text{ET} \quad &\big(\forall\, t \in [a,\, b] \quad f(t) - \delta \leq \widetilde{\psi}(t) \leq f(t) \leq \widehat{\psi}(t) \leq f(t) + \delta\big)
\end{aligned}$$

• Les applications $\widetilde{\psi}$ et $\widehat{\psi}$ sont construites à partir du théorème précédent appliqué aux applications $t \mapsto f(t) \mp \delta/2$ et à $\delta/2 > 0$ à la place de δ. Les applications φ obtenues dans ces deux cas conviennent l'une pour $\widetilde{\psi}$ l'autre pour $\widehat{\psi}$:

$$\forall\, t \in [a,\, b] \quad \left|\big(f(t) - \frac{\delta}{2}\big) - \widetilde{\psi}(t)\right| \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{donc } f(t) - \delta \leq \widetilde{\psi}(t) \leq f(t)$$

$$\forall\, t \in [a,\, b] \quad \left|\big(f(t) + \frac{\delta}{2}\big) - \widehat{\psi}(t)\right| \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{donc } f(t) \leq \widehat{\psi}(t) \leq f(t) + \delta$$

Construction de l'intégrale

Dans ce paragraphe les applications f et g sont continues sur $[a,\, b]$, et les ensembles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ associé à f sont définis ainsi :

$$\mathcal{I}(f) = \left\{ \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ \varphi(t)\,\mathrm{d}t \ / \ \varphi\in\mathcal{E}([a,\,b],\mathbb{R}) \ \textsf{ET} \ \big(\forall\, t\in[a,\,b] \quad \varphi(t)\leq f(t)\big) \right\}$$

$$\mathcal{S}(f) = \left\{ \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ \psi(t)\,\mathrm{d}t \ / \ \psi\in\mathcal{E}([a,\,b],\mathbb{R}) \ \textsf{ET} \ \big(\forall\, t\in[a,\,b] \quad f(t)\leq \psi(t)\big) \right\}$$

Les ensembles $\mathcal{I}(f)$ et $\mathcal{S}(f)$ sont notés $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ quand ils se réfèrent sans ambiguïté à l'application f.

• Toute application continue f sur un segment $[a,\,b]$ est bornée :

$$\exists\,(m,M)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall\, t\in[a,\,b] \quad m\leq f(t)\leq M$$

• L'ensemble $\mathcal{I}$ est non vide et est majoré, et $\mathcal{S}$ est non vide et minoré.

• L'application continue f sur le segment $[a,\,b]$ est supposée minorée par m et majorée par M.
Les applications constantes $t\mapsto m$ et $t\mapsto M$ encadrent l'application f et définissent les intégrales $m(b-a)\in\mathcal{I}$ et $M(b-a)\in\mathcal{S}$.
De même toute application en escalier φ qui minore f vérifie ces inégalités pour tout $t\in[a,\,b]$:

$$\varphi(t)\leq f(t)\leq M \qquad \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ M\,\mathrm{d}t = (b-a)M$$

Ainsi $\mathcal{I}$ est majoré par $M(b-a)$.
Une démonstration similaire justifie que $\mathcal{S}$ est minorée par $m(b-a)$.
Ces arguments justifient l'existence de $\sup\mathcal{I}$ et de $\inf\mathcal{S}$.

• Pour toute application continue f les ensembles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ sont adjacents ; ils vérifient ces égalités définissant l'intégrale d'une application continue :

$$\int_a^b\!\!\!c\ f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\mathcal{I} = \inf\mathcal{S}$$

• La démonstration de l'égalité repose sur les deux propositions :

$$\sup\mathcal{I}\leq\inf\mathcal{S} \qquad \big(\forall\,\delta>0 \quad \sup\mathcal{I}+\delta\geq\inf\mathcal{S}\big)$$

Un passage à la limite quand δ tend vers 0 dans les deux applications $\delta\mapsto\sup\mathcal{I}+\delta$ et $\delta\mapsto\inf\mathcal{S}$ justifie ensuite $\sup\mathcal{I}\geq\inf\mathcal{S}$.

• La preuve de l'inégalité $\sup\mathcal{I}\leq\inf\mathcal{S}$ provient de la comparaison des intégrales $\rho\in\mathcal{I}$ et $\sigma\in\mathcal{S}$ associées aux applications en escalier φ et ψ :

$$\big(\forall\, t\in[a,\,b] \quad \varphi(t)\leq f(t)\leq\psi(t)\big) \implies \rho = \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sigma$$
$$\forall\,(\rho,\sigma)\in\mathcal{I}\times\mathcal{S} \quad \rho\leq\sigma$$

La suite de la démonstration comporte deux étapes.
La borne inférieure est le plus grand des minorants, d'où la première proposition, et la borne supérieure est le plus petit des majorants, d'où la dernière :

$$\begin{array}{ll}
\forall\,(\rho,\sigma)\in\mathcal{I}\times\mathcal{S} \quad \rho\leq\sigma & \\
\Longrightarrow \forall\,\rho\in\mathcal{I} \quad (\forall\,\sigma\in\mathcal{S} \quad \rho\leq\sigma) & \rho \text{ est un minorant de } \mathcal{S} \\
\Longrightarrow \forall\,\rho\in\mathcal{I} \quad \rho\leq\inf\mathcal{S} & \inf\mathcal{S} \text{ est un majorant de } \mathcal{I} \\
\Longrightarrow \sup\mathcal{I}\leq\inf\mathcal{S} &
\end{array}$$

• L'inégalité réciproque repose sur l'approximation uniforme.
Soit $\delta>0$; l'existence d'une application en escalier φ qui approche par défaut f à $\varepsilon=\delta/(b-a)>0$ permet de prouver la seconde inégalité.
Le début de la preuve repose sur l'équivalence entre ces deux encadrements, la dernière inégalité étant obtenue par ajout de ε à la première, de la même façon que pour les encadrements de partie entière :

$$\begin{array}{cc}
\underline{f(t)-\varepsilon\leq\varphi(t)}\leq f(t) & \varphi(t)\leq \underline{f(t)\leq\varphi(t)+\varepsilon} \\
x-1<\mathrm{E}(x)\leq x & \mathrm{E}(x)\leq x<\mathrm{E}(x)+1
\end{array}$$

L'intégration des applications en escalier de cet encadrement aboutit à des éléments de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$:

$$\rho = \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ (\varphi(t)+\varepsilon)\,\mathrm{d}t = \int_a^b\!\!\!\varepsilon\ \varphi(t)\,\mathrm{d}t + (b-a)\varepsilon = \rho+\delta$$
$$\rho\in\mathcal{I} \qquad \rho+\delta\in\mathcal{S}$$

Les manipulations des bornes supérieures et inférieures terminent la démonstration :

$$\rho\leq\sup\mathcal{I} \qquad \inf\mathcal{S}\leq\rho+\delta$$
$$\inf\mathcal{S}\leq\rho+\delta\leq\sup\mathcal{I}+\delta$$

L'argument de passage à la limite présenté précédemment quand δ tend vers 0 termine cette démonstration.

• L'ensemble des applications continues et en escalier est l'ensemble des applications constantes.
Les deux définitions précédentes de l'intégrales sont compatibles pour ces applications constantes car elles aboutissent toutes les deux à la même valeur $(b-a)\,f(a)$.

• L'application constante f est en escalier d'intégrale $(b-a)\,f(a)$.
L'application f est en escalier est égale à elle-même f. Cette remarque justifie successivement l'encadrement par l'application en escalier f, et ces inégalités relatives aux ensembles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{I}$:

$$f(t) \leq f(t) \leq f(t) \qquad (b-a)\,f(a) = \int_a^b\!\!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{I} \cap \mathcal{S}$$

$$(b-a)\,f(a) \leq \sup \mathcal{I} = \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \inf \mathcal{S} \leq (b-a)\,f(a)$$

$$\int_a^b\!\!\mathcal{E}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\,f(a)$$

Propriétés élémentaires de l'intégrale

L'intégrale est linéaire

• L'intégrale des applications en escalier est linéaire :

$$\int_a^b\!\!\mathcal{C}\, (\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

où $(f,g) \in \mathcal{C}([a,\, b], \mathbb{R})^2$

• La démonstration de la linéarité se fait en plusieurs étapes, pour $f+g$, puis λf lorsque $\lambda > 0$ ou $\lambda = 0$ et pour $-f$ à partir des ensembles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$.
La combinaison des égalités obtenues termine la preuve d'égalité.

L'intégrale est additive

• L'intégrale des applications continues est additive.
Si l'application f est continue et si $c \in]a,\, b[$ alors les restrictions $f_{/[a,\,c]}$ et $f_{/[c,\,b]}$ sont continues et les intégrales vérifient ces propriétés :

$$\int_a^b\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale est positive

• L'intégrale des applications continues est positive.

$$a < b \ \textsf{ET}\ f \in \mathcal{C}([a,\, b], \mathbb{R}) \ \textsf{ET}\ \big(\forall\, t \in [a,\, b] \quad f(t) \geq 0\big) \Longrightarrow \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

• L'application constante de valeur nulle est en escalier et minore f :

$$\int_a^b\!\!\mathcal{E}\, 0\,\mathrm{d}t = 0 \in \mathcal{I} \qquad 0 \leq \sup \mathcal{I} = \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

• Toutes applications f et g de $\mathcal{C}([a,\, b], \mathbb{R})$ vérifient ces propriétés :

$$a \leq b \ \textsf{ET}\ \big(\forall\, t \in [a,\, b] \quad f(t) \leq g(t)\big) \Longrightarrow \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\left|\int_a^b\!\!\mathcal{C}\, f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b\!\!\mathcal{C}\, |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

• Comme pour les applications en escalier, la première propriété repose sur la linéarité de l'intégrale appliquée à $g(t) - f(t) \geq 0$, et la seconde à l'encadrement $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$.

Cas des applications continues par morceaux

Définition des applications continues par morceaux

• L'application f possède une discontinuité de première espèce en a si et seulement si f n'est pas continue en a, et si les limites à gauche et à droite de f en a existent et sont finies.

• Une application f définie sur le segment $[a,\, b]$ est continue par morceaux et seulement s'il existe une subdivision $(\alpha_k)_{k=0}^n$ de $[a,\, b]$ vérifiant ces propriétés :

$$\forall\, k \in \{1 \cdots n\} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{/]\alpha_{k-1},\,\alpha_k[} \text{ est continue} \\ \textsf{ET} \lim\limits_{\substack{x \to \alpha_k \\ x > \alpha_k}} f(x) \text{ existe et est réelle} \\ \textsf{ET} \lim\limits_{\substack{x \to \alpha_k \\ x < \alpha_{k+1}}} f(x) \text{ existe et est réelle} \end{array} \right.$$

• Autrement dit les arguments précédents de limites à gauche et à droite signifient que les restrictions de l'application f sur les sous-intervalles ouverts de la subdivision $]\alpha_{k-1},\, \alpha_k[$ où $k \in \{1 \cdots n\}$ se prolongent par continuité sur les segments élémentaires $[\alpha_{k-1},\, \alpha_k]$.

• Les valeurs à gauche et à droite de ces prolongements par continuité n'ont aucune raison d'être égales à la valeur de f en ce point.

• Une application en escalier est en particulier une application continue par morceaux.
Toute application continue est continue par morceaux.

• Les applications suivantes ne sont pas en escalier sur l'intervalle $[0,\, 1]$, la première car elle n'a pas de limite à droite en zéro, la seconde car elle ne possède pas un nombre fini de discontinuité :

$$f : [0,\,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f : [0,\,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{E}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

• L'ensemble des applications continues par morceaux sur $[a,\,b]$ est un espace vectoriel noté $\mathcal{C}m([a,\,b],\mathbb{R})$.

• D'une part l'ensemble $\mathcal{C}m([a,\,b],\mathbb{R})$ contient les applications continues sur $[a,\,b]$ et par exemple l'application nulle, et d'autre part les mêmes arguments que ceux employés pour les applications en escalier justifie que $\mathcal{C}m([a,\,b],\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

• La définition des applications continues par morceaux se généralise à des intervalles quelconques I lorsque les restrictions sur n'importe quel segment inclus dans I sont continues sauf en un nombre finie de points de discontinuité qui doivent être de première espèce.
La généralisation est la même pour les applications en escalier.

• La entière partie E est continue par morceaux et en escalier sur $\mathbb{R}$
Les points de discontinuité de l'application E sont tous de première espèce et correspondent aux nombres entiers. Ils sont en nombre fini sur tous les segments $[a,\,b]$, au maximum $\mathrm{E}(b-a)+1$.

Construction de l'intégrale

• L'intégrale d'une application continue par morceaux f de subdivision $(\alpha_k)_{k=0}^n$ est la somme des intégrales sur chacun des sous-intervalles élémentaires où l'application est continue, une fois prolongée par continuité à l'extrémité des sous-intervalles :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} \!\!\!\!\mathcal{C}\; f(t)\,\mathrm{d}t$$

• Cette définition est indépendante de la subdivision choisie.

• La notion d'intégrale sur un segment d'une application continue par morceaux généralise les deux notions précédentes et est compatible avec celles-ci.

• Dans la suite la notion d'intégrale employée est celle d'intégrale d'une application continue par morceau sur un segment.

Propriétés élémentaires de l'intégrale

• L'intégrale des applications en continue par morceaux est linéaire :

$$\int_a^b (\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\text{où } (f,g) \in \mathcal{C}m([a,\,b],\mathbb{R})^2$$

• La démonstration de la linéarité repose sur des manipulations sur les subdivisions associées à f et g.

L'intégrale est additive

• L'intégrale des applications continues par morceaux est additive.
Si l'application f est continue par morceaux et si $c \in \,]a,\,b[$ alors les restrictions $f_{/[a,\,c]}$ et $f_{/[c,\,b]}$ sont continues par morceaux et les intégrales vérifient ces propriétés :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

• La relation de Chasles précédente démontrée pour $a < c < c$ s'étend ainsi de la façon cohérente :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

L'intégrale est positive

• L'intégrale des applications continues par morceaux est positive.

$$a < b \;\textsf{ET}\; f \in \mathcal{C}([a,\,b],\mathbb{R}) \;\textsf{ET}\; \big(\forall\, t \in [a,\,b] \quad f(t) \geq 0\big) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

• Toutes applications f et g de $\mathcal{C}m([a,\,b],\mathbb{R})$ vérifient ces propriétés :

$$a \leq b \;\textsf{ET}\; \big(\forall\, t \in [a,\,b] \quad f(t) \leq g(t)\big) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

• Comme dans les deux cas précédents, la première propriété repose sur la linéarité de l'intégrale appliquée à $g(t) - f(t) \geq 0$, et la seconde à l'encadrement $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$.

Intégrales des applications continues et positives

• L'intégrale $\int_a^b f$ d'une application f positive, continue et non identiquement nulle sur un intervalle $[a,\ b]$ vérifiant $a < b$ est strictement positive :

$$\left.\begin{array}{r} f\in\mathcal{C}([a,\ b],\mathbb{R}) \\ \mathsf{ET}\ \big(\forall\, x\in[a,\ b]\quad f(x)\geq 0\big) \\ \mathsf{ET}\ \big(\exists\, u\in[a,\ b]\quad f(u)>0\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

• La contraposée de cette proposition énonce qu'une application continue sur un segment ni vide ni réduit à un point est nulle dès que son intégrale vaut zéro :

$$\left.\begin{array}{r} f\in\mathcal{C}([a,\ b],\mathbb{R}) \\ \mathsf{ET}\ \big(\forall\, x\in[a,\ b]\quad f(x)\geq 0\big) \\ \mathsf{ET}\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \big(\forall\, x\in[a,\ b]\quad f(x)=0\big)$$

• La preuve de ce théorème consiste à exploiter la continuité de l'application f en u où $f(u) > 0$. Sur un certain intervalle de largeur $h > 0$ au voisinage de u l'application f est minorée par $f(u)/2$:

$$f(u)>0 \qquad \exists\,\eta>0\quad \forall\, x\in[u-\eta,\ u+\eta]\cap[a,\ b]\quad f(x)\geq\frac{f(u)}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq h\, f(u)/2 > 0$$

• Cette propriété relative aux applications continues et celle de positivité de l'intégrale ne se déduisent pas l'une de l'autre ; l'une énonce une inégalité stricte, et l'autre une inégalité large. Seule la propriété générale de positivité s'applique à la fonction caractéristique χ_0 qui est une application en escalier :

$$\begin{array}{rl} \chi_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \qquad \int_{-1}^1 \chi_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Sommes de Riemann

Dans ce paragraphe l'application f est continue sur $[a,\ b]$.

• Une somme S_n de Riemann à n termes est de la forme suivante où, pour tout n, les éléments de la famille $(x_k)_{k=1}^n$ vérifient ces encadrements :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) \qquad \text{où } h=\frac{b-a}{n} \text{ et } x_k\in[a+(k-1)h,\ a+kh]$$

• La limite d'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sommes de Riemann à n termes est l'intégrale de l'application f correspondante :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

• La démonstration du théorème repose sur l'approximation par des applications en escalier de l'application f continue sur le segment $[a,\ b]$ donc uniformément continue.

Pour tout $\varepsilon > 0$ l'uniforme continuité de f justifie l'existence de $\eta > 0$:

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\eta>0\quad \forall\,(x,y)\in[a,\ b]\quad |x-y|\leq\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$$

Soit $\delta > 0$, l'uniforme continuité appliquée à $\varepsilon = \delta/(b-a) > 0$ justifie l'existance de $\eta > 0$.

La suite de la démonstration prouve que toute somme de Riemann S_n d'indice $n \geq N = \mathrm{E}((b-a)/\eta) + 1 \geq (b-a)/\eta$ approche l'intégrale à $\delta > 0$ près.

Soit $n \geq N$ les inégalités suivantes terminent la démonstration :

$$n\geq N\geq\frac{b-a}{\eta} \qquad h=\frac{b-a}{n}\leq\frac{b-a}{N}\leq\eta$$

$$\begin{aligned} & (x_k,t)\in[a+(k-1)h,\ a+kh]^2 \\ \Longrightarrow\ & |t-x_k|\leq h\leq\eta \\ \Longrightarrow\ & |f(x)-f(x_k)|\leq\varepsilon \\ \Longrightarrow\ & \left|\int_{a+(k-1)h}^{a+kh}(f(t)-f(x_k))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{a+(k-1)h}^{a+kh}|f(t)-f(x_k)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon\,\frac{b-a}{n}\leq\frac{\delta}{n} \end{aligned}$$

Une somme sur tout ces sous-intervalles pour obtenir l'intégrale sur le segment $[a,\ b]$ termine la démonstration :

$$\forall\,\delta>0\quad \exists\,N\in\mathbb{N}^*\quad \forall\,n\geq n\quad \left|S_n-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\delta$$

• Les valeurs habituellement prises pour x_k sont les extrémités ou le milieu des intervalles des subdivisions :

$$x_k = a+kh = \frac{(n-k)a+kb}{n} \qquad x_k = a+(k-1)h$$

$$x_k = a+\frac{2k-1}{2}\,h \qquad \text{où } h=\frac{b-a}{n}$$

Le plus souvent les applications correspondantes sont recherchées sur l'intervalle $[0,\ 1]$, le quotient $1/n$ est mis en facteur, et les points étudiés sont $x_k = k/n$.

• Les exemples de sommes de Riemann sont variés :

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{4} \qquad \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2 \qquad \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{2k+1} = \ln 2$$

• Les applications associés aux exemples précédents sont donc celles-ci :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \qquad \text{de limite} \int_0^1 t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \qquad \text{de limite} \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}} \qquad \text{de limite} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Le dernier exemple est sur le même principe et fait intervenir les points milieux des sous-intervalles $[(k-1)/n, \, k/n]$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2}{2k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2+\frac{2k-1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}}$$

$$\text{de limite} \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = \ln 2$$

• Des sommes de cette forme dont les indices varient de 0 à n et non de 1 à n admettent la même limite car le terme ajouté est de limite nulle, comme dans cet exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad \text{de limite } 0 + \ln 2 = \ln 2$$

Lien avec les primitives

Dans ce paragraphe l'application f est continue par morceaux sur un intervalle I.

• L'application F définie ainsi est appelée primitive de f :

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \qquad F'(x) = f(x)$$

• Toute primitive d'une application continue par morceaux est continue.

• La démonstration repose sur le fait que toute application continue par morceaux sur un segment est bornée. Ainsi l'application $|f|$ est majorée par M, donc la relation de Chasles justifie que la primitive est une application lipschitzienne donc continue :

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_x^y M \, \mathrm{d}t \right| = M|y-x|$$

• Toute primitive d'une application continue est dérivable.
La derivée d'une primitive F d'une application continue f est dérivable de dérivée f : $F' = f$.

• La démonstration repose sur la continuité de f en $u \in [a, \, b]$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ vérifiant cette proprosition :

$$\forall \, t \in [a-\eta, \, a+\eta] \cap [a, \, b] \quad |f(u) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Soit $v \in [a-\eta, \, a+\eta] \cap [a, \, b]$, les inégalités sur les intégrales aboutissent à ces majorations :

$$\left| \frac{F(v)-F(u)}{v-u} - f(u) \right| = \left| \frac{\int_u^v f(t) \, \mathrm{d}t - (v-u) \, f(u)}{v-u} \right|$$
$$= \left| \frac{\int_u^v (f(t) - f(u)) \, \mathrm{d}t}{v-u} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon(v-u)}{v-u} \right| = \varepsilon$$

Cette majoration termine la preuve de la dérivabilité de F en u et justifie $F'(u) = f(u)$.

• Une autre définition d'une primitive F d'une application continue f correspond à une application dérivable telle que $F' = f$.
Le théorème précédent de dérivation justifie que les deux définitions sont compatibles.

• En particulier toute application continue possède une primitive dérivable obtenue par une intégrale.