LES FONCTIONS RÉELLES

Ce chapitre construit les principales propriétés des applications comme le précédent traitait des suites, et traite plus particulièrement de la continuité.

L'ensemble de définition de l'application f est noté $\mathcal{D}$, et doit pour certains théorèmes être un intervalle ou un segment.

■ L'image d'une suite de limite a par une application continue en a est une suite convergente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \text{ ET } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$$

* La contraposée ou une démonstration par l'absurde permettent de démontrer qu'une application n'est pas continue en a en construisant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a dont l'image ne converge pas vers $f(a)$.

* Un certain nombre de propriétés des applications continues démontrées dans ce chapitre exploitent ce théorème, notamment combiné au théorème de Bolzano-Weierstrass appliqué aux suites bornées.

Applications monotones

* Étudier les limites éventuelles à gauche et à droite en a de f impose que $\mathcal{D}$ vérifient ces propositions au voisinage de a :

$$\forall h > 0 \quad]a - h, a[\cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad \forall h > 0 \quad]a, a + h[\cap \mathcal{D} \neq \emptyset$$

Dans cette partie toutes les limites à gauche ou à droite supposent que cette condition est vérifiée.

■ Toute application croissante f vérifie cet encadrement aux points et sur les voisinages où l'application f est bien définie, où $a < b$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \leq f(b) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x)$$

Les inégalités sont dans l'autre sens pour une application f décroissante.

Ces limites sont éventuellement infinies aux extrémités de l'ensemble de définition.

* Si l'ensemble $\mathcal{D}$ est un intervalle ouvert I alors les limites à gauche

et à droite existent nécessairement dès que $(a, b) \in I$.

Pour un segment la limite à gauche de l'extrémité inférieure et celle à droite de l'extrémité supérieure ne sont pas définies.

◆ La démonstration de cette propriété est similaire à celle de la convergence des suites croissante et majorée.

◇ La preuve que la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = c$ cette borne supérieure consiste à appliquer la propriété caractéristique de la borne supérieure :

$$c = \sup \{ f(x) / x \in \mathcal{D} \text{ ET } x < a \} \leq f(a) \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \mathcal{D} \cap]-\infty, a[\quad f(u) \leq c \\ \forall h > 0 \quad \exists v \in \mathcal{D} \cap]-\infty, a[\quad c - h < f(v) \end{array} \right.$$

La démonstration de la limite applique l'hypothèse précédente avec avec $h = \varepsilon > 0$ et vérifie que $\eta = a - v > 0$ convient :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [a - \eta, a[\cap \mathcal{D} \quad f(x) \in [f(u), c] \subset [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \\ \text{car } a - \eta = v < a \text{ et } c - h = c - \varepsilon < f(v) < f(x) < c$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \sup \{ f(x) / x \in \mathcal{D} \text{ ET } x < a \} \leq f(a)$$

La démonstration de la convergence des suites croissantes et celle de la limite à gauche des applications croissantes reposent sur des encadrements similaires :

pour les suites

$$c - h < u_N \leq u_n \leq c \leq c + h \quad \text{car } N < c$$

à gauche pour les applications croissantes

$$c - h < f(v) \leq f(x) \leq c \leq c + h \quad \text{car } x \in]v, a[$$

La preuve de l'existence de la limite à gauche est comparable, et correspond à une borne inférieure :

$$c = \inf \{ f(x) / x \in \mathcal{D} \text{ ET } a < x \} \geq f(a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \mathcal{D} \cap]a, +\infty[\quad c \leq f(u) \\ \forall h > 0 \quad \exists v \in \mathcal{D} \cap]a, +\infty[\quad f(v) < c + h \end{array} \right.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \inf \{ f(x) / x \in \mathcal{D} \text{ ET } x > a \} \geq f(a)$$

Ce premier encadrement provient du fait que f est croissante, toutes les valeurs de l'application f à gauche de a sont majorées par $f(a)$, la borne supérieure est le plus petit des majorants d'où la première

inégalité, et de même $f(a)$ minore les valeurs de $f(x)$ pour $x > a$, d'où la seconde inégalité et celle en b :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$$

La comparaison des limites avec la valeur de $f((a+b)/2)$ prouve la dernière inégalité.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)$$

La preuve pour les applications décroissantes est similaire ou applique le résultat précédent à l'application croissante $-f$.

* Les limites à gauche et à droite peuvent être différentes, comme pour cette application croissante sur $] -1, 2[$:

$$f(x) = x + [x] - [-x] \quad \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & x-1 & 0 & x+1 & 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1 \\ f(0) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 2 \end{array} \right.$$

► Toute application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ possède un point fixe $c \in [0, 1]$, c'est-à-dire vérifiant $f(c) = c$.

► L'application $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue et change de signe entre 0 et 1. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g justifie l'existence de c tel que $g(c) = 0$ et $f(c) = c$:

$$\begin{array}{lll} 0 \leq f(0) \leq 1 & g(0) = f(0) - 0 \in [0, 1] & g(0) \geq 0 \\ 0 \leq f(1) \leq 1 & g(1) = f(1) - 1 \in [-1, 0] & g(1) \leq 0 \end{array}$$

► Il existe des applications continues g définies sur un intervalle borné non fermé I qui ne possède pas de point fixe.

► L'application $f : x \mapsto x/2$ est définie de $]0, 1]$ dans $]0, 1]$ et ne possède pas de point fixe sur $]0, 1]$.

Applications continues sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires

■ Pour toute application continue f sur un segment $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) \leq 0$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

* L'hypothèse $f(a)f(b) \leq 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés, ou, dit autrement, que l'application f change de signe entre a et b .

◆ L'existence de c tel que $f(c) = 0$ correspond à la borne supérieure des valeurs de x tel que $f(x)$ est du signe de $f(a)$. L'existence de c repose sur le principe de la coupure.

◇ Cette démonstration détaille le cas $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ alors $c = a$ ou $c = b$ convient. Le dernier cas $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ se ramène au premier en étudiant l'application $-f$ à la place de f .

Dans le premier cas $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, l'ensemble E est défini ainsi et est non vide car $a \in E$, et est majoré.

$$E = \{x \in [a, b] / f(x) < 0\} \quad c = \sup E \quad a \in E \quad a \leq c$$

Un critère séquentiel appliqué à $\sup E$ justifie l'existence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E qui converge vers $c = \sup E$, d'où cette inégalité qui exploite la continuité de f et la conservation des inégalités larges dans les limites.

$$u_n \in E \quad f(u_n) \leq 0 \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \leq 0$$

L'étape suivante justifie $c < b$ pour montrer $f(c) \geq 0$. L'hypothèse f continue en b appliquée à $\varepsilon' = f(b)/2$ justifie $c \leq b - \eta' < b$:

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [b - \eta, b] \quad f(b) - \varepsilon < f(x) < f(b) + \varepsilon \\ \exists \eta' > 0 \quad \forall x \in [b - \eta', b] \quad 0 < \frac{f(b)}{2} < f(x) \end{array}$$

L'application f est donc positive sur $[b - \eta', b]$, $E \subset [a, b - \eta']$ et $\sup E \leq b - \eta' < b$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \min(b, c + 1/n)$ est à valeur dans $[a, b] \setminus E$, ainsi $f(v_n) \geq 0$; cette suite converge vers c , et la continuité de f aboutit à l'inégalité opposée :

$$v_n \notin E \quad f(v_n) \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = c \quad f(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) \geq 0$$

La combinaison des deux inégalités $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$ prouve le théorème des valeurs intermédiaires : $f(c) = 0$.

□ Une application continue f sur un segment $[a, b] \neq \emptyset$ prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.

Autrement dit, en notant J est le segment non vide d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$, l'application f vérifie cette proposition :

$$\begin{cases} J = [f(a), f(b)] & \text{si } f(a) \leq f(b) \\ J = [f(b), f(a)] & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall y \in J \quad \exists x \in [a, b] \quad f(x) = y$$

◇ La preuve repose sur le signe de l'application $g : x \mapsto f(x) - y$. L'application g change de signe sur $[a, b]$ car $g(a)g(b) \leq 0$.

■ L'image d'un intervalle I par une application continue est un intervalle.

◇ La démonstration de cette propriété repose sur la caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\forall (u, v) \in (f(I))^2 \quad \exists (a, b) \in I^2 \quad f(a) = u \text{ ET } f(b) = v$$

La propriété précédente justifie $[u, v] \subset f(I)$, et prouve que $f(I)$ est un intervalle.

* Pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires La fonction f doit être définie en tout point du segment $[a, b]$.

La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue car continue en tout point de son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$, donc continue sur $[-1, 1]$, change de signe car $f(-1)f(1) = -1 < 0$, et ne possède pas de solution à l'équation $f(c) = 0$.

La fonction continue f n'est pas définie en 0, et f n'est pas une application sur $[-1, 1]$.

* L'application $[\bullet]$ est bien définie sur tout segment de $\mathbb{R}$ et n'est pas continue, l'image du segment $[0, 1]$ est l'ensemble $\{0, 1\}$ qui n'est pas un intervalle.

Applications continues et bijectives

⊗ Toute application strictement monotone est injective.

◇ La démonstration suivante le justifie pour une application strictement croissante, la raison est analogue pour les applications strictement décroissantes.

$$\begin{aligned} x \neq y &\implies x < y \text{ OU } y < x \\ &\implies f(x) < f(y) \text{ OU } f(y) < f(x) \\ &\implies f(x) \neq f(y) \end{aligned}$$

■ Toute application continue et strictement monotone sur un intervalle I est bijective, et l'application réciproque de l'intervalle $f(I)$ dans I est continue et monotone de même monotonie.

★ Le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f par symétrie par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

◇ L'application $f : I \mapsto f(I)$ est par construction surjective, et injective car supposée strictement monotone. Elle est donc bijective. L'application f^{-1} est donc bien définie.

◇ La démonstration suivante justifie que f^{-1} est strictement croissante si f est strictement croissante, pour tout $(x, y) \in I^2$:

$$\begin{aligned} x < y &\implies f(x) < f(y) & f(x) \geq f(y) &\implies x \geq y \quad \text{par contraposée} \\ x \neq y &\implies f(x) \neq f(y) & & \text{car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < y &\iff f(x) < f(y) \quad \text{en combinant les implications précédentes} \\ f^{-1}(u) < f^{-1}(v) &\iff u < v & & \text{pour tout } (u, v) \in (f(I))^2, \\ & & & \text{en prenant } x = f^{-1}(u) \text{ et } y = f^{-1}(v) \end{aligned}$$

La démonstration est similaire pour les applications f strictement décroissantes.

◇ La preuve de la continuité de f^{-1} commence par ces encadrements faisant intervenir la stricte monotonie de f et de f^{-1} , et suppose $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} b - \varepsilon < y < b + \varepsilon &\iff f^{-1}(b - \varepsilon) < f^{-1}(y) < f^{-1}(b + \varepsilon) \\ \eta = \min(b - f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon) - b) &> 0 \end{aligned}$$

Ces implications terminent la preuve de la continuité de f^{-1} en b :

$$\begin{aligned} b - \eta < y < b + \eta \\ \implies b - (b - f(a - \varepsilon)) &\leq b - \eta < y < b + \eta \leq b + (f(a + \varepsilon) - b) \\ \implies f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon) \\ \implies a - \varepsilon &\leq f^{-1}(y) \leq a + \varepsilon \\ \implies |f^{-1}(b) - f^{-1}(y)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Si a est placé à une extrémité de l'intervalle I seule intervient une des inégalités de ces encadrements.

En outre cette démonstration impose que $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$ soient à valeurs dans l'intervalle I ; dans le cas contraire ces implications doivent être appliquées avec une valeur $\varepsilon' > 0$ strictement plus petite de façon à ce que $a \pm \varepsilon$ soient dans I , l'inégalité finale reste valable :

$$|f^{-1}(b) - f^{-1}(y)| < \varepsilon' < \varepsilon$$

□ Toute application continue et bijective sur un intervalle est strictement monotone.

◇ Si l'application f n'est pas monotone il existe des points $x < y < z$ de I vérifiant $f(y) > f(x)$ et $f(y) > f(z)$, ou $f(y) < f(x)$ et $f(y) < f(z)$, ce qui signifie que la valeur de $f(y)$ n'est pas comprise entre les valeurs $f(x)$ et $f(z)$.

Dans ces deux cas le théorème des valeurs intermédiaires prouve que f n'est pas injective :

$$\exists c \in [x, y[\quad f(c) = \max(f(x), f(z)) < f(y)$$

$$\exists d \in]y, z] \quad f(d) = \min(f(x), f(z)) > f(y)$$

La valeur de $f(c)$ ou $f(d)$ est celle de $f(x)$ ou $f(y)$.

* L'application suivante est bijective sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle et n'est ni continue ni monotone :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Applications continues sur un segment

■ Toute application continue f sur un segment $[a, b] \neq \emptyset$ est bornée et atteint ses bornes notées $\inf_{x \in [a, b]} f(x)$ et $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$:

$$\exists (u, v) \in [a, b]^2 \quad \forall x \in I \quad f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

$$f(u) = \inf \{f(x) / x \in [a, b]\} = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$f(v) = \sup \{f(x) / x \in I\} = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

◆ Un critère séquentiel associé au théorème de Bolzano-Weierstrass prouve par l'absurde que l'application f est majorée.

◇ Si l'application f n'est pas majorée alors il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

de $[a, b]$ vérifiant $f(u_n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass justifie qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui a une limite $c \in [a, b]$.

Ainsi d'une part $f(u_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n$ et $(f(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, et d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(c)$ car l'application f est supposée continue. D'où la contradiction.

En conclusion l'application f est majorée. Une preuve similaire justifie que f est minorée, et donc f est bornée.

◇ La preuve que f atteint la borne supérieure de ses valeurs sur I exploite aussi le théorème de Bolzano-Weierstrass. L'image $f([a, b])$ est majoré et non vide, donc la borne supérieure est bien définie et il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers cette borne supérieure :

$$s = \sup \{f(x) / a \leq x \leq b\} = \sup(f([a, b])) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = s$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de la forme $v_n = f(u_n)$ avec $u_n \in [a, b]$, et possède une suite extraite qui converge vers $u \in [a, b]$.

Ces limites découlent des hypothèses précédentes :

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$$

$$f(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = s$$

L'égalité $f(u) = s$ justifie donc que « la borne supérieure est atteinte ».

La méthode est similaire pour la borne inférieure.

■ L'image d'un segment par une application continue est un segment.

◇ L'image d'un segment, qui est un intervalle de type particulier, est un intervalle d'après une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

La propriété précédente justifie par ailleurs que l'image d'un segment est bornée et atteint ses bornes.

La combinaison de ces deux résultats justifie que l'image d'un segment par une application continue est un intervalle borné, et atteint ses bornes. Cette image est donc un intervalle fermé et borné, c'est-à-dire un segment.

* L'image par une application continue d'un interalle fermé n'est pas nécessairement fermé, et celle d'un intervalle borné n'est pas nécessairement borné :

$$\arctan \mathbb{R} =]-\pi/2, \pi/2[\quad \tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$$

► Toute application continue et périodique est bornée.

► Soit une application f continue et périodique de période $T > 0$. La restriction continue de l'application f au segment $[0, T]$ est bornée, par le théorème précédent.

Les valeurs de f sur $\mathbb{R}$ sont les mêmes que sur le segment $[0, T]$ car $f(x + T) = f(x)$, ainsi $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$ est un segment, et est donc bornée.

Applications uniformément continues

Définition de l'uniforme continuité

• Une application f définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si elle vérifie l'une ou l'autre de ces propositions équivalentes :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad \forall y \in [x - \eta, x + \eta] \cap \mathcal{D} \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2 \quad |y - x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

* Ce paragraphe exploite régulièrement les équivalences suivantes :

$$|u - v| < h \iff v \in]u - h, u + h[$$

$$|u - v| \leq h \iff v \in [u - h, u + h]$$

* Comme pour les applications continues les inégalités relatives à $|y - x|$ et à $|f(y) - f(x)|$ peuvent être strictes ou larges.

Les conditions sur $\forall \varepsilon > 0$ et $\exists \eta > 0$ doivent être strictes.

□ Toute application uniformément continue est continue.

♦ La preuve revient à permuter deux quantificateurs différents.

Pour la continuité $\eta > 0$ dépend de $\varepsilon > 0$ et de $x \in \mathcal{D}$.

Pour l'uniforme continuité $\eta > 0$ dépend de $\varepsilon > 0$ uniquement.

◇ Ces propositions suivantes sont équivalentes et correspondent à la continuité de f en tout point $x \in \mathcal{D}$. Deux quantificateurs $\forall$ peuvent être permutés :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in [x - \eta, x + \eta] \cap \mathcal{D} \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in [x - \eta, x + \eta] \cap \mathcal{D} \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

La proposition précédente correspond à l'uniforme continuité et entraîne celle-ci car toute expression en $\exists \eta \forall x$ implique $\forall x \exists \eta$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad \forall y \in [x - \eta, x + \eta] \cap \mathcal{D} \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

► L'application $f : x \mapsto x^2$ est continue sans être uniformément continue.

► L'application f est continue car obtenue par le produit de deux applications continues : l'application identité $\text{Id}_{\mathbb{R}}$.

► L'application carrée n'est pas uniformément continue car ses variations autour de x sont de plus en plus importante quand x tend vers $+\infty$.

La preuve que l'application f n'est pas uniformément continue consiste à nier la définition de l'uniforme continuité, par échange des quantificateurs et négation de l'implication finale :

$$\text{NON } (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2 \quad |y - x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists (x, y) \in \mathcal{D}^2 \quad |y - x| \leq \eta \text{ ET } |y^2 - x^2| > \varepsilon$$

La suite de la démonstration vérifie que la valeur $\varepsilon = 1 > 0$ convient. Soit $\eta > 0$; il reste à trouver $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant les deux conditions $|y - x| < \eta$ et $|y^2 - x^2| > 1$.

Il suffit de prendre $y = x + \eta/2$ pour vérifier la première condition.

La seconde condition se réécrit ainsi :

$$y^2 - x^2 = (x + \eta/2)^2 - x^2 = x^2 + \eta x + \eta^2/4 - x^2 = \eta x + \eta^2/4 > \eta x$$

Pour vérifier la seconde condition le choix de $x = 1/\eta$ convient.

Ces inégalités vérifiant que ce couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dépendant de $\eta > 0$ convient représentent la synthèse de la démonstration :

$$x = \frac{1}{\eta} \quad y = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \quad |y - x| = \left| \frac{\eta}{2} \right|$$

$$|y^2 - x^2| = \left| \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} \right)^2 - \frac{1}{\eta^2} \right| = \left| \frac{1}{\eta^2} + 2 \frac{\eta}{2\eta} + \frac{\eta^2}{4} - \frac{1}{\eta^2} \right|$$

$$= 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

La valeur de x est d'autant plus grande que $\eta > 0$ est petit.

Théorème de Heine

■ Toute application continue sur un segment est uniformément continue.

♦ La démonstration se fait par la contraposée et prouve qu'une application qui n'est pas uniformément continue sur un segment n'est pas continue par une méthode séquentielle et le théorème de Bolzano-Weierstrass.

◇ Supposons que l'application f n'est pas uniformément continue sur le segment $[a, b]$:

NON $(\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall (x, y) \in [a, b]^2 |y - x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon)$

$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \eta > 0 \exists (x, y) \in [a, b]^2 |y - x| \leq \eta \text{ ET } |f(y) - f(x)| > \varepsilon_0$

Pour cette valeur de $\varepsilon_0 > 0$ toute valeur de $\eta > 0$ convient ; Le critère séquentiel consiste à appliquer cette proposition avec $\eta = 1/n > 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour chaque valeur de $\eta = 1/n > 0$ l'hypothèse justifie l'existence de deux réels x_n et y_n de $\mathcal{D}$ vérifiant les deux conditions $|y_n - x_n| \leq \eta$ et $|f(y_n) - f(x_n)| > \varepsilon_0$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans le segment $[a, b]$. Il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers $x \in [a, b]$. Ces encadrements justifient que la suite $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent aussi vers x .

$$|y_n - x_n| \leq \frac{1}{n} \quad |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$$

$$x_{\varphi(n)} - \frac{1}{n} \leq y_{\varphi(n)} \leq x_{\varphi(n)} + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = x \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = x$$

La démonstration se termine par l'absurde, si l'application f était continue les suites $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifieraient ces limites :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} &= x = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) &= f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\varphi(n)}) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| &= |f(x) - f(x)| = 0 \\ |f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| &\geq \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Le passage à la limite dans cette dernière inégalité énonce la contradiction $\varepsilon_0 \leq 0$ alors que par hypothèse $\varepsilon_0 > 0$.

L'application f n'est donc pas continue, et la preuve du théorème de Heine est terminée.

★ En conclusion des théorèmes précédents, toute application continue sur un segment est uniformément continue, bornée et atteint ses bornes, et l'image de ce segment est un segment.

Autres propriétés de l'uniforme continuité

► La somme, le produit par une constante, et la composition d'applications uniformément continue est uniformément continue.

Le produit d'applications uniformément continue n'est pas nécessairement uniformément continue.

Le produit d'applications uniformément continues et bornées est uniformément continue.

* Les démonstrations que la somme, le produit par une constante et la composition d'applications uniformément continues sont uniformément continues reprennent les mêmes méthodes que celles appliquées pour les applications continues.

— La première démonstration exploite l'inégalité triangulaire pour obtenir une inégalité en $< \varepsilon$ à partir des deux hypothèses appliquées à $\varepsilon/2$.

— La deuxième multiplie par $|\lambda|$ une inégalité, l'hypothèse est donc appliquée à $\varepsilon/|\lambda| > 0$.

— La troisième combine les hypothèses sur les deux applications l'une à la suite de l'autre.

►► La démonstration de l'uniforme continuité de la somme commence par ces hypothèses :

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \eta_1 > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |y - x| < \eta_1 \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \eta_2 > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |y - x| < \eta_2 \implies |g(y) - g(x)| < \varepsilon_2$$

La propriété à démontrer est celle-ci :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |y - x| < \eta \implies |(f + g)(y) - (f + g)(x)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, les hypothèses précédentes appliquées à $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 > 0$ permettent d'obtenir l'inégalité finale et justifient l'existence de $\eta_1 > 0$ et de $\eta_2 > 0$.

Lorsque x et y vérifient les deux conditions sur η_1 et η_2 l'inégalité triangulaire termine la démonstration. Pour que les deux conditions sur η_1 et η_2 soient vérifiées il suffit de choisir $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ces implications terminent la démonstration :

$$\begin{aligned} |y - x| < \eta &\implies \begin{cases} |y - x| \leq \eta < \eta_1 \\ |y - x| \leq \eta < \eta_2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon/2 \\ |g(y) - g(x)| \leq \varepsilon/2 \end{cases} \\ &\implies |(f + g)(y) - (f + g)(x)| \\ &= |(f(y) - g(y)) + (g(y) - g(x))| \\ &\leq |f(y) - g(y)| + |g(y) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

La démonstration de l'uniforme continuité de $f + g$ est terminée.

» La démonstration de l'uniforme continuité du produit par une constante λ commence par cette hypothèse sur f et démontre cette proposition pour λf :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \tilde{\eta} > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |y - x| < \tilde{\eta} &\implies |f(y) - f(x)| < \tilde{\varepsilon} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |y - x| < \eta &\implies |\lambda f(y) - \lambda f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$ l'application λf est uniformément continue car constante de valeur 0, et tout $\eta > 0$ convient par exemple $\eta = 1 > 0$:

$$\begin{aligned} |0 \cdot f(y) - 0 \cdot f(x)| = 0 < \varepsilon \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \text{en particulier si } |y - x| < 1. \end{aligned}$$

La suite suppose $\lambda \neq 0$. La propriété demandée se ramène à un produit par λ dans une inégalité.

Soit $\varepsilon > 0$, donc $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/|\lambda| > 0$ et l'hypothèse justifie l'existence de $\tilde{\eta} > 0$.

Vérifions que $\eta = \tilde{\eta} > 0$ convient.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|y - x| < \tilde{\eta} = \eta$.

Ces implications terminent la preuve de l'uniforme continuité de λf :

$$\begin{aligned} |y - x| < \tilde{\eta} = \eta &\implies |f(y) - f(x)| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \\ &\implies |\lambda f(y) - \lambda f(x)| = |\lambda| |f(y) - f(x)| < |\lambda| \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \end{aligned}$$

» L'uniforme continuité de f et de g s'écrit ainsi :

$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \eta_1 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |y - x| < \eta_1 \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon_1$
 $\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \eta_2 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |y - x| < \eta_2 \implies |g(y) - g(x)| \leq \varepsilon_2$
 Soit $\varepsilon > 0$; cette démonstration cherche à vérifier la condition suivante :

$$|(g \circ f)(y) - (g \circ f)(x)| = |g(f(y) - g(f(x)))| \leq \varepsilon$$

Cette inégalité se rapproche de la définition de l'uniforme continuité de g ; la démonstration applique l'hypothèse sur g avec $\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$ pour affirmer l'existence de $\eta_2 > 0$. Dès que $|f(y) - f(x)| \leq \eta_2$ la condition $|(g \circ f)(y) - (g \circ f)(x)| \leq \varepsilon$ est vérifiée.

L'hypothèse sur f appliquée avec $\varepsilon_1 = \eta_2 > 0$ permet ensuite de prouver l'existence de $\eta_1 > 0$ vérifiant $|f(y) - f(x)| \leq \eta_2$ dès que $|y - x| \leq \eta_1$.

Ces implications avec $\eta = \eta_1 > 0$ prouvent l'uniforme continuité de l'application composée :

$$\begin{aligned} |y - x| < \eta_1 &\implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon_1 = \eta_2 \\ &\implies |g(f(y)) - g(f(x))| < \varepsilon_2 = \varepsilon \end{aligned}$$

» L'application identité est uniformément continue car $\eta = \varepsilon$ convient :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad |y - x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

L'exemple précédent a démontré que l'application carrée $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

Le produit de deux applications uniformément continues n'est donc pas nécessairement uniformément continue.

» La démonstration que le produit de deux applications uniformément continues et bornées est uniformément continue repose sur la décomposition suivante commune à beaucoup de propriétés sur les produits :

$$\begin{aligned} |(fg)(y) - (fg)(x)| &= |f(y)g(y) - f(x)g(x)| \\ &= |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |f(y)g(y) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(x)g(x)| \\ &= |f(y)| |g(y) - g(x)| + |g(x)| |f(y) - f(x)| \end{aligned}$$

La suite de la démonstration est comparable à celle sur les sommes d'applications uniformément continues. Il suffit de majorer chaque terme de la somme par $\varepsilon/2 > 0$.

Les facteurs $f(y)$ et $g(x)$ sont majorés car les applications f et g sont

supposées bornées par A et B nécessairement positifs :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq A_1 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |g(x)| \leq A_2$$

Quitte à remplacer A_1 et A_2 par $A_1 + 1$ et $A_2 + 1$ la suite suppose $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$. Les hypothèses d'uniforme continuité s'énoncent ainsi :

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \eta_1 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |y - x| < \eta_1 \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \eta_2 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |y - x| < \eta_2 \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon_2$$

Soit $\varepsilon > 0$, les hypothèses précédentes appliquées à $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2A_2) > 0$ et à $\varepsilon_2 = \varepsilon/(2A_1) > 0$ énoncent l'existence de $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$. La fin de la démonstration justifie que $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ convient par ces implications valable pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} |y - x| < \eta &\implies \begin{cases} |y - x| \leq \eta < \eta_1 \\ |y - x| \leq \eta < \eta_2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon/(2A_2) \\ |g(y) - g(x)| \leq \varepsilon/(2A_1) \end{cases} \\ &\implies |(fg)(y) - (fg)(x)| \\ &\leq |f(y)| |g(y) - g(x)| + |g(x)| |f(y) - f(x)| \\ &\leq A \frac{\varepsilon}{2A_1} + A_2 \frac{\varepsilon}{2A_2} = \varepsilon \end{aligned}$$

► Toute application continue définie sur $\mathbb{R}$ et ayant deux limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$ est uniformément continue.

* Le théorème de Heine ne s'applique pas car $\mathbb{R}$ n'est pas un segment. L'hypothèse sur les limites finies à l'infini est nécessaire.

► Les hypothèses sur les limites finies ℓ_1 et ℓ_2 en $\pm\infty$, et l'uniforme continuité de f s'expriment ainsi :

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists A_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x \leq A_1 \quad |f(x) - \ell_1| < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists A_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq A_2 \quad |f(x) - \ell_2| < \varepsilon_2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |y - x| < \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Le but de l'énoncé consiste à démontrer cette dernière proposition. Les hypothèses de limite énoncent que l'application f varie « peu » sur des voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, plus précisément ces majorations suggèrent un lien entre ε , ε_1 et ε_2 :

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - \ell_1 + \ell_1 - f(x)| \leq |f(y) - \ell_1| + |f(x) - \ell_1| \\ &= |f(y) - \ell_2 + \ell_2 - f(x)| \leq |f(y) - \ell_2| + |f(x) - \ell_2| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ les définitions des limites ℓ_1 et ℓ_2 appliquées à $\varepsilon_1 = \varepsilon/2 > 0$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon/2 > 0$ justifient l'existence de A_1 et A_2 .

Tout couple (x, y) à valeurs dans $]A_1, +\infty[$ vérifie donc cette majoration :

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - \ell_1| + |f(x) - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Il en est de même sur $]-\infty, A_2[$.

Le théorème de Heine s'applique à tout segment $[A_1, A_2]$ de $\mathbb{R}$, et f est uniformément continue sur ce segment.

Pour cette valeur de $\varepsilon > 0$ il existe donc une valeur $\eta > 0$ convenant sur ce segment.

Ce raisonnement traite donc les trois cas suivants :

$$(x, y) \in]-\infty, A_1]^2 \quad (x, y) \in [A_1, A_2]^2 \quad (x, y) \in]A_2, +\infty[^2$$

Il ne traite pas les cas où (x, y) est « à cheval » sur l'un de ces intervalles, par exemple $x < A_1 < y$.

Il est nécessaire que ces intervalles se recouvrent pour justifier l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$, pour cela appliquons le théorème de Heine à $[A_1 - 2, A_2 + 2]$. L'uniforme continuité justifie l'existence de $\eta > 0$ sur ce nouveau segment.

Vérifions que $\eta' = \min(\eta, 1) > 0$ convient pour l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$; la contrainte $\eta' \leq 1$ permet de générer les recouvrement des trois intervalles précédents.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|y - x| < \eta'$; montrons que dans tous les cas $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$:

si $x < A_1 - 1 : x - \eta' < y < x + \eta' < A_1 - 1 + 1 = A_1$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(y) - \ell_1| + |f(x) - \ell_1| \leq 2\varepsilon_1 = \varepsilon$$

si $x > A_2 + 1 : A_2 = A_2 + 1 - 1 < x - \eta' < y < x + \eta'$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(y) - \ell_2| + |f(x) - \ell_2| \leq 2\varepsilon_2 = \varepsilon$$

si $x \in [A_1 - 1, A_2 + 1]$:

$$A_2 - 2 = A_2 - 1 - 1 < x - \eta' < y < x + \eta' < A_1 + 2$$

$$(x, y) \in [A_1 - 2, A_2 + 2]^2 \text{ ET } |y - x| < \eta' \leq \eta$$

$$\implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Dans tous les cas l'implication de l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ est vérifiée :

$$|y - x| < \eta' \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Applications lipschitziennes

• Une application lipschitzienne est une application f définie sur $\mathcal{D}$ vérifiant cette proposition :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$$

Dans ce cas f est dite lipschitzienne de rapport k , la valeur de $k \geq 0$ n'est pas unique, tout majorant de k convient également.

- * Autrement dit le taux d'accroissement de f est borné par k .
- Une application f est dite contractante lorsqu'elle est lipschitzienne de rapport $k < 1$.
- Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

◇ Soit $k \geq 0$ est un rapport de lipschitz possible de l'application lipschitzienne f . Si $k = 0$ l'application f est constante et donc uniformément continue.

Dans le cas général $k > 0$ et cette implication justifie avec les notions usuelles que f est uniformément continue de valeur $\eta = \varepsilon/k$:

$$|y - x| < \eta = \frac{\varepsilon}{k} \implies |f(y) - f(x)| \leq k|y - x| < k\eta = \varepsilon$$

* L'inégalité des accroissement fini fournit, pour les applications dérivables, une condition nécessaire de vérifier si f est lipschitzienne :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \sup_{t \in [x, y]} |f'(t)|$$

En particulier toute application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment possède une dérivée continue sur ce segment donc bornée.

* L'application $|\bullet|$ est lipschitzienne de rapport 1 :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Elle est lipschitzienne sans être dérivable en 0.

► L'application $\sqrt{\bullet}$ est uniformément continue et n'est pas lipschitzienne.

► La démonstration que l'application $\sqrt{\bullet}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ repose sur une implication de cette forme sur $\mathbb{R}_+$:

$$x - \eta < y < x + \eta \implies \sqrt{x} - \varepsilon < \sqrt{y} < \sqrt{x} + \varepsilon$$

Les rôles de x et y sont symétriques dans cette inégalité, la démonstration d'une inégalité, quitte à échanger les rôles de x et y , justifie

l'encadrement :

$$x \leq y < x + \eta \implies \sqrt{x} \leq \sqrt{y} < \sqrt{x} + \varepsilon$$

Le taux d'accroissement de $\sqrt{\bullet}$ est maximal à l'origine, avec une tangente verticale. La valeur de η valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+$ doit convenir pour $x = 0$.

La démonstration suivante justifie que $\eta = \varepsilon^2 > 0$ convient en montrant d'abord cette inégalité de termes positifs équivalente à celle des carrés :

$$\sqrt{x + \varepsilon^2} \leq \sqrt{x} + \varepsilon \quad x + \varepsilon^2 \leq x + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{x}$$

Cette dernière inégalité est évidemment vraie, donc l'inégalité initiale aussi. Les implications suivantes en découlent :

$$x \leq y < x + \varepsilon^2 \implies \sqrt{x} \leq \sqrt{y} < \sqrt{x} + \varepsilon$$

En conclusion l'application $\sqrt{\bullet}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$

► Une deuxième méthode pour montrer que l'application $\sqrt{\bullet}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

► Démontrer que l'application $\sqrt{\bullet}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ consiste à prouver cette proposition :

$$\text{NON } (\exists k \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|) \\ \forall k \geq 0 \quad \exists (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| > k|x - y|$$

Le taux d'accroissement de l'application $\sqrt{\bullet}$ est maximal à l'origine, pour cette raison la suite de la démonstration suppose $x = 0$ et cherche $y > 0$ de façon à vérifier cette inégalité :

$$\sqrt{y} = |\sqrt{y}| = |\sqrt{y} - \sqrt{x}| > k|y - x| = ky \quad y > k^2 y^2 \quad 1 > k^2 y$$

Dans le cas général où $k > 0$, les inégalités ci-dessus justifie que $y > 1/k^2$ convient, par exemple $y = 1/(2k^2)$:

$$\left| \sqrt{\frac{2}{2k^2}} - \sqrt{0} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}k} > \frac{1}{k} = k\left(\frac{1}{k^2} - 0\right) > k\left(\frac{1}{2k^2} - 0\right)$$

Cette dernière démonstration

► La somme, le produit par une constante, et la composition d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.

Le produit d'applications lipschitziennes n'est pas nécessairement une application lipschitzienne.

Le produit d'applications lipschitziennes et bornées est une applica-

tion lipschitzienne.

» Ces majorations justifient que $f + g$, λf et $g \circ f$ sont des applications lipschitziennes lorsque f et g sont des applications lipschitziennes de rapport k_1 et k_2 :

$$\begin{aligned} |(f + g)(y) - (f + g)(x)| &= |f(y) - f(x) + g(y) - g(x)| \\ &\leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \\ &\leq k_1|y - x| + k_2|y - x| = (k_1 + k_2)|y - x| \\ |(\lambda f)(y) - (\lambda f)(x)| &= |\lambda| |f(y) - f(x) + g(y) - g(x)| \\ &\leq (|\lambda| k_1) |y - x| \\ |(g \circ f)(y) - (g \circ f)(x)| &= |g(f(y)) - g(f(x))| \\ &\leq k_2 |f(y) - f(x)| \leq k_2 k_1 |y - x| \end{aligned}$$

Les applications $f + g$, λf et $g \circ f$ sont lipschitzienne de rapport respectif $k_1 + k_2$, λk_1 et $k_1 k_2$.

» La preuve est la même que pour les applications uniformément continues. l'application $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est lipschitzienne de rapport 1.

L'application carrée $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue et n'est donc pas lipschitzienne.

» La démonstration que le produit de deux applications lipschitziennes et bornées est lipschitzienne repose sur la même inégalité que celle appliquée dans le cas de l'uniforme continuité. Notons $A_1 \geq 0$ et $A_2 \geq 0$ les majorants des applications $|f|$ et de $|g|$, et k_1 et k_2 les rapports de Lipschitz de f et g :

$$\begin{aligned} |(fg)(y) - (fg)(x)| &= |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |f(y)g(y) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(x)g(x)| \\ &= |f(y)| |g(y) - g(x)| + |g(x)| |f(y) - f(x)| \\ &\leq A_1 k_2 |y - x| + A_2 k_1 |y - x| = (A_1 k_2 + A_2 k_1) |y - x| \end{aligned}$$

L'application produit est lipschitzienne de rapport $(A_1 k_2 + A_2 k_1)$.

» Toute application f contractante sur le segment $[a, b]$ à valeur dans $[a, b]$ possède un unique point fixe.

» L'application f est contractante, donc lipschitzienne, uniformément continue et continue ; l'application $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue et change de signe sur $[a, b]$, ainsi le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f(c) = c.$$

Le fait que l'application f soit contractante de rapport $k < 1$ prouve l'unicité du point fixe. Supposons que $f(c) = c$ et $f(d) = d$, ces inégalités proviennent de la définition des applications contractantes :

$$|c - d| = |f(c) - f(d)| \leq k|c - d| \quad (1 - k)|c - d| \leq 0$$

Par ailleurs $1 - k > 0$ et $|c - d| \geq 0$ d'où ces deux inégalités et l'unicité $c = d$ du point fixe :

$$0 \leq (1 - k)|c - d| \leq 0 \quad |c - d| = 0 \quad c = d$$

» Toute application $\text{Id}_{\mathbb{R}} + f$ où f est contractante de rapport $k < 1$ sur $\mathbb{R}$ est bijective.

» L'application $\text{Id}_{\mathbb{R}} + f$ est continue car définie par la somme de deux applications continues.

Ces inégalités où $x < y$ justifient que l'application $\text{Id}_{\mathbb{R}} + f$ est strictement croissante :

$$-k(y - x) \leq -|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| \leq k(y - x)$$

$$\begin{aligned} 0 < (1 - k)(y - x) &= (y - x) - k(y - x) \\ &\leq (y - x) + (f(y) - f(x)) = (\text{Id}_{\mathbb{R}} + f)(y) - (\text{Id}_{\mathbb{R}} + f)(x) \end{aligned}$$

Les encadrements suivants justifient les limites infinies de $\text{Id}_{\mathbb{R}} + f$ pour $x > 0$, au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} -kx < f(x) - f(0) &\leq k|x - 0| = kx \quad f(0) - kx \leq f(x) \\ x + f(0) - kx = f(0) + (1 - k)x &\leq x + f(x) = (\text{Id}_{\mathbb{R}} + f)(x) \\ 1 - k > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - k)x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Id}_{\mathbb{R}} + f)(x) = +\infty \end{aligned}$$

La méthode est la même pour $x < 0$:

$$\begin{aligned} -k|x| = kx \leq f(0) - f(x) &\leq k|x| = -kx \quad f(x) \leq f(0) - kx \\ x + f(x) = (\text{Id}_{\mathbb{R}} + f(x)) &\leq x + f(0) - kx = (1 - k)x + f(0) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - k)x + f(0) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{Id}_{\mathbb{R}} + f)(x) = -\infty \end{aligned}$$

En conclusion les limites de $f + \text{Id}_{\mathbb{R}}$ en $\pm\infty$ sont infinies, et ainsi $(\text{Id}_{\mathbb{R}} + f)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; l'application $\text{Id}_{\mathbb{R}} + f$ est donc continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Autour des applications continues

► Les définitions suivantes sont équivalentes et correspondent à la continuité de f en a :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$(\mathcal{P}_2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [a - \eta, a + \eta] \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$(\mathcal{P}_3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

$$(\mathcal{P}_4) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [a - \eta, a + \eta] \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

► Les déductions reliant les quantificateurs et les inclusions d'ensembles dépendent du type du quantificateur, par exemple :

$$(\forall x \in [u, v] \quad \dots) \implies (\forall x \in]u, v[\quad \dots)$$

$$(\exists x \in]u, v[\quad \dots) \implies (\exists x \in [u, v] \quad \dots)$$

Ainsi une propriété valable pour tout $x \in [a - \eta, a + \eta]$ est valable pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[$. Par ailleurs si un résultat vérifie $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ alors $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Ces arguments justifient ces implications :

$$(\mathcal{P}_2) \implies (\mathcal{P}_1) \implies (\mathcal{P}_3) \quad (\mathcal{P}_2) \implies (\mathcal{P}_4) \implies (\mathcal{P}_3)$$

Il reste donc à démontrer $(\mathcal{P}_3) \implies (\mathcal{P}_2)$. La démonstration suppose pour cela $(\mathcal{P}_3)$ et démontre $(\mathcal{P}_2)$.

Soit $\varepsilon_2 > 0$, la propriété $(\mathcal{P}_3)$ est vérifiée pour $\varepsilon_3 = \varepsilon_2/2 > 0$ et justifie l'existence de $\eta_3 > 0$.

La valeur $\eta_2 = \eta_3/2 > 0$ convient à cause de cette inclusion :

$$[a - \eta_2, a + \eta_2] = \left[a - \frac{\eta_3}{2}, a + \frac{\eta_3}{2} \right] \subset]a - \eta_3, a + \eta_3[$$

$$\forall x \in [a - \eta_2, a + \eta_2] \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2}{2} < \varepsilon_2$$

► Seule la proposition $(\mathcal{Q}_1)$ correspond à la continuité de f en a .

$$(\mathcal{Q}_1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [a - \eta, a + \eta] \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

$$(\mathcal{Q}_2) \quad \forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in [a - \eta, a + \eta] \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

$$(\mathcal{Q}_3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \geq 0 \quad \forall x \in [a - \eta, a + \eta] \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

$$(\mathcal{Q}_4) \quad \forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists \eta \geq 0 \quad \forall x \in [a - \eta, a + \eta] \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

► Ces propositions avec $\eta = 0$ sont vérifiées pour toute application f :

$$x \in [a - \eta, a + \eta] = \{a\} \quad |f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 \leq \varepsilon$$

Les propositions $(\mathcal{Q}_3)$ et $(\mathcal{Q}_4)$ sont bien vérifiées pour toute application f , continue ou non. Ainsi $(\mathcal{Q}_3) \iff (\mathcal{Q}_4)$.

L'implication $(\mathcal{Q}_2) \implies (\mathcal{Q}_1)$ est due au fait qu'une propriété valable pour tout $\varepsilon \geq 0$ est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$.

Une application continue ne vérifie pas nécessairement la proposition $(\mathcal{Q}_2)$. Par exemple l'application $f(x) = x$ est continue, vérifie $(\mathcal{Q}_1)$ et ne vérifie pas $(\mathcal{Q}_2)$ pour la valeur $\varepsilon = 0$. La condition $(\mathcal{Q}_2)$ énonce qu'il existe $\eta > 0$ vérifiant cette proposition qui est fausse :

$$(\forall x \in [a - \eta, a + \eta] \quad |f(x) - f(a)| \leq 0) \text{ est fausse}$$

$$\text{Pour } x = a + \eta \neq a : \quad |f(x) - f(a)| = |x - a| = \eta \leq 0 = \varepsilon$$

► Toute application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

► La démonstration repose sur la propriété que $\mathbb{Z}$ est discret, tout entier $a \in \mathbb{Z}$ vérifie $]a - 1/2, a + 1/2[\cap \mathbb{Z} = \{a\}$. La démonstration suivante justifie que $\eta = 1/2$ convient donc.

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon > 0$, la valeur $\eta = 1/2 > 0$ vérifie ces propriétés :

$$x \in]a - 1/2, a + 1/2[\cap \mathbb{Z} = \{a\}$$

$$\implies x = a$$

$$\implies |f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

► Une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est continue si et seulement si elle est constante.

► Toute fonction constante f définie sur $\mathcal{D}$ est continue : par exemple $\eta = 1 > 0$ convient :

$$\forall a \in \mathcal{D} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap \mathcal{D}$$

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

Réciproquement montrons à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires qu'une application continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est constante en raisonnant par l'absurde.

Si l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ n'est pas constante alors il existe deux valeurs $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) \neq f(v)$.

Quitte à échanger les rôles de u et v supposons $f(u) < f(v)$. Ces images sont des entiers relatifs et $\mathbb{Z}$ est discret, ainsi :

$$f(u) < f(u) + 1 \leq f(v) \quad f(u) \leq w = f(u) + \frac{1}{2} \leq f(v) \quad w \notin \mathbb{Z}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f entre u et v justifie qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(c) = w \notin \mathbb{Z}$.

Cette conclusion contredit que f n'est pas à valeurs entières, il est impossible que l'application f ne soit pas constante, et donc l'application continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ est constante.

► Toute application f est continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1 \text{ possède un point fixe noté } c \in \mathbb{R}_+.$$

► Si $f(0) = 0$ alors $c = 0$ convient.

La suite suppose $f(0) \neq 0$ dans le but d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à l'application $g : x \mapsto f(x) - x$. La limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1 \text{ justifie qu'il existe un rang } A > 0 \text{ à partir duquel } \frac{f(x)}{x} < 1 :$$

$$\forall x \in [A, +\infty[\quad \frac{f(x)}{x} < 1 \quad \text{c'est-à-dire } f(x) < x$$

En particulier $f(A) < A$ et par ailleurs $f(0) = 1 > 0$; en conclusion l'application $g : x \mapsto f(x) - x$ change de signe sur $[0, A]$ et il existe $c \in [0, A] \subset \mathbb{R}_+$ tel que $g(c) = 0$, $f(c) = c$ et $f(c)/c = 1$ car $c \neq 0$.

► L'application f est continue en a si et seulement si l'image par f de toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a est une suite de limite $f(a)$.

* Le théorème de l'image par une application continue d'une suite convergente correspond au sens direct de cette propriété.

La contraposée pour montrer qu'une application n'est pas continue en a à partir d'une suite de limite a dont l'image n'est pas de limite $f(a)$ correspond à la même implication.

L'énoncé précédent énonce en plus la réciproque : Si les images par f de toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a convergent vers $f(a)$ alors f est continue en a :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de limite } a \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \text{ [existe et]} = f(a)$$

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ [existe et]} = a$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \text{ [existe et]} = f(a)$$

Par la contraposée de l'implication précédente, si l'application f n'est pas continue en a alors il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a dont l'image $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$.

► La démonstration de la réciproque prouve la contraposée précédente. La méthode repose sur un critère séquentiel pour prouver l'existence d'une telle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Par hypothèse l'application f n'est pas continue en a :

$$\text{NON } (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in]a - \eta, a + \eta[\quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

Pour cette valeur de $\varepsilon_0 > 0$ et $\eta = 1/n > 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $x_n \in \mathbb{R}$ vérifiant ces deux propositions et construisant une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$$

La dernière inégalité contredit $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$. En effet car dans ce cas $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$

► Si l'application f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$ et si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ alors les deux bornes supérieures existent et vérifient cette égalité :

$$f(\sup A) = \sup(f(A))$$

► La monotonie de f démontre une inégalité et la continuité de f l'autre.

Soit $c = \sup A$, donc c est un majorant de A et la croissance de f montre que $f(c)$ est un majorant de $f(A)$ qui est non vide, donc $\sup(f(A))$ existe bien et vérifie cette inégalité : plus petit :

$$(\forall a \in A \quad a \leq c = \sup A) \quad (\forall a \in A \quad f(a) \leq f(c))$$

$$\sup(f(A)) \leq f(c) = f(\sup A)$$

Un critère séquentiel permet de construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A dont la limite est $c = \sup A$. L'application f est continue donc la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$.

Ainsi $f(u_n) \in f(A)$ d'où cette inégalité obtenue par passage à la limite :

$$u_n \in A \quad f(u_n) \in f(A) \quad f(u_n) \leq \sup(f(A)) \\ f(\sup A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \leq \sup(f(A))$$

En conclusion $f(\sup A) = \sup(f(A))$.

Cette propriété n'est pas valable pour les applications croissantes sans être continue, par exemple avec la partie entière :

$$\begin{aligned} \lfloor [0, 1[&= \{0\} & \sup(\lfloor [0, 1[) &= 0 \\ \sup [0, 1[&= 1 & \lfloor \sup [0, 1[&= \lfloor (1) = 1 > 0 \end{aligned}$$