BORNE SUPÉRIEURE ET NOMBRES RATIONNELS

Soit $E = \Big\{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 < 2\Big\}$. *Déterminer* $\sup E$.

1 - Montrons que $\sup E = \sqrt{2}$ par la propriété caractéristique de la borne supérieure.

Soit $x \in E$, donc $x^2 < 2$. L'application racine $\sqrt{\bullet}$ est strictement croissante. Ainsi $x \leq |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{2}$.

Soit $h > 0$ montrons $\exists\, a \in E$ tel que $\sqrt{2} - h < a$. Posons $h' = \min(h, 1) > 0$, ainsi $0 \leq \sqrt{2} - h < \sqrt{2}$, puis par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{Q}$ vérifiant l'écadrement $0 \leq \sqrt{2} - h' < a < \sqrt{2}$. L'application carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $a^2 < 2$ et ainsi $a \in E$ et vérifie $\sqrt{2} - h < \sqrt{2} - h' < a < \sqrt{2}$.

En conclusion, la propriété caractéristique de la borne supérieure de E a démontré $\sup E = \sqrt{2}$.

Soit $h > 0$ puis $h' = \min(h, 1) > 0$. nous pouvons aussi rechercher $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $0 \leq \sqrt{2} - h' < r = \dfrac{p}{q} < \sqrt{2}$. Comme souvent, prenons $q = \lfloor \dfrac{1}{h'} \rfloor + 1 > \dfrac{1}{h'} \geq \dfrac{1}{h} > 0$, donc $0 < \dfrac{1}{q} < h$. Posons $p = \lfloor \sqrt{2} q \rfloor < \sqrt{2} q$, remarquons que cette inégalité est stricte car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ puis $\sqrt{2} q \notin Q$. Ainsi, par quotient par $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{2} q - 1 < p = \lfloor \sqrt{2} q \rfloor < \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} - h' < \sqrt{2} - \frac{1}{q} = \frac{\sqrt{2} q - 1}{q} < r = \frac{p}{q} < \sqrt{2}$$

En conclusion $r \in \mathbb{Q}$ et $0 \leq \sqrt{2} - h' < r < \sqrt{2}$. Cette construction aboutit à une valeur effective de $a = r$ en fonction de h.