

QUELQUES INÉGALITÉS ET LIMITES

Suites récurrentes

- Une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où l'application f est définie de l'intervalle I dans I .

L'inclusion $f(I) \subset I$ est une condition suffisante pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- * La relation de récurrence suivante ne construit pas une suite car u_5 n'est pas défini :

$$\begin{cases} u_0 = 8/5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1} \end{cases} \quad u_1 = 5/3 \quad u_2 = 3/2 \quad u_3 = 2 \quad u_4 = 1$$

La fonction de récurrence est définie de $\mathbb{R} \setminus 1$ dans $\mathbb{R}^*$, et 1 a un antécédent par f .

- Une suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone dès que la fonction f est croissante ; les valeurs de u_0 et de $f(u_0) = u_1$ permettent de déterminer si la suite est croissante ou décroissante.

- ♦ Les deux conditions possibles sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} u_0 \leq u_1 & u_0 \geq u_1 \\ \implies f(u_0) = u_1 \leq f(u_1) = u_2 & \implies f(u_0) = u_1 \geq u_2 \\ \implies f(u_1) = u_2 \leq f(u_2) = u_3 & \implies f(u_1) = u_2 \geq u_3 \\ \implies \dots & \implies \dots \end{array}$$

La rédaction complète de cette démonstration nécessite une récurrence.

- * Une telle suite monotone qui est en plus bornée est donc convergente.

- Lorsque la fonction f est décroissante, les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie opposée ; les valeurs de u_0 et de u_2 suffisent pour déterminer le sens de monotonie de ces suites.

- ♦ Les implications suivante illustrent cette démonstration :

$$\begin{aligned}
u_0 \leq u_2 &\implies f(u_0) = u_1 \geq f(u_2) = u_3 \\
&\implies f(u_1) = u_2 \leq f(u_3) = u_4 \\
&\implies f(u_2) = u_3 \geq f(u_4) = u_5 \\
u_0 \leq u_2 \leq u_4 \leq \dots &\quad u_1 \geq u_3 \geq u_5 \leq \dots
\end{aligned}$$

La justification est comparable si $u_0 \geq u_2$.

► Exemples de deux suites récurrentes :

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ & u_{n+1} &= f(u_n) & v_{n+1} &= f(v_n) \\
x &\longmapsto \sqrt{x+2} & & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} & & \\
u_0 &= 0 < u_1 = \sqrt{2} & v_0 &= 7 > v_1 = 3
\end{aligned}$$

Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessous sont bien définies et monotones car l'application f associée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et croissante.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc convergente.

Une démonstration par récurrence justifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, positive et majorée par 2, donc convergente vers $\ell \in [0, 2]$.

■ Lorsque l'application continue f est définie sur un intervalle fermé I qui vérifie $f(I) \subset I$ les seules limites éventuelles d'une suite récurrente sont les valeurs de $\ell \in I$ qui vérifient $f(\ell) = \ell$ appelées points fixes de f .

♦ La suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est d'une part la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $\varphi : n \mapsto n+1$, et d'autre part l'image par l'application continue f de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La limite éventuelle, unique, vérifie $\ell = f(\ell)$.

* Une suite associée à une application continue sur un intervalle fermé n'ayant pas de points fixe n'a pas de limite finie.

* L'hypothèse sur les intervalles fermés est indispensable : Cette suite récurrente est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et converge vers 0 :

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* & u_0 &= 1 & u_{n+1} &= f(u_n) \in \mathbb{R}_+^* \\
x &\longmapsto \frac{x}{2} \\
u_n &= \frac{1}{2^n} & \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= 0 & 0 \in \mathbb{R} \text{ ET } 0 \notin \mathbb{R}_+^*
\end{aligned}$$

► Étude de la convergence de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 2$.

Cette suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à une application croissante $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et continue n'a pas de point fixe sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. La suite monotone $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et n'a pas de limite finie, elle diverge donc vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 & u_{n+1} &= u_n^2 + 2 & u_1 &= 2 > u_0 \\ f(x) = x &\iff x^2 - 2x + 2 = 0 & \Delta &= 1 - 8 < 0 \end{aligned}$$

* Lorsque ℓ est un point fixe de l'application continue f sur un intervalle fermé I , prouver la convergence vers 0 de $(|u_n - \ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge effectivement vers ℓ .

► La suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est associée à cette application f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2+x}} \quad u_0 = 0 \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

La preuve de la convergence passe par la recherche du point fixe de f et de la majoration par récurrence de $|u_n - \ell|$:

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell > 0 &\implies \frac{1}{\sqrt{2+\ell}} = \ell > 0 \\ &\implies \ell > 0 \text{ ET } \frac{1}{2+\ell} = \ell^2 \\ &\implies \ell > 0 \text{ ET } \ell^3 + 2\ell^2 - 1 = (\ell+1)(\ell^2 + \ell - 1) = 0 \\ &\implies \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{qui réciproquement vérifie } f(\ell) = \ell \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2+u_n}} - \frac{1}{\sqrt{2+\ell}} \right| = \left| \frac{\sqrt{2+\ell} - \sqrt{2+u_n}}{\sqrt{2+\ell} \sqrt{2+u_n}} \right| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{2+\ell} - \sqrt{2+u_n})(\sqrt{2+\ell} + \sqrt{2+u_n})}{\sqrt{2+\ell} \sqrt{2+u_n} (\sqrt{2+\ell} + \sqrt{2+u_n})} \right| \\ &= \left| \frac{u_n - \ell}{\sqrt{2+\ell} \sqrt{2+u_n} (\sqrt{2+\ell} + \sqrt{2+u_n})} \right| \leq \left| \frac{u_n - \ell}{4} \right| \end{aligned}$$

$$|u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{4^n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_0 - \ell|}{4^n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

La convergence vers 0 de $(|u_n - \ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de justifier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ

◦ Une application f est dite contractante lorsqu'elle est lipschitzienne de rapport $k < 1$.

□ Si f est une application contractante définie sur un intervalle I fermé — borné ou non — vérifiant $f(I) \subset I$, le théorème du point fixe énonce ces trois propositions :

$$\exists ! \ell \in I \quad f(\ell) = \ell$$

toute suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers ℓ

Comparaison des intégrales et des séries

Dans ce paragraphe l'application f est continue par morceaux, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

• La série en $f(k)$ où $k \in \mathbb{N}$ est l'intégrale d'une application en escalier de valeur $f(k)$ constante sur les intervalles $]k-1, k]$ ou $[k, k+1[$; ces encadrements proviennent des théorèmes de comparaison d'intégrales :

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

$$\text{car } f(E(x)) \geq f(x) \geq f(E(x)+1) \geq f(x+1) \geq 0$$

Ces inégalités se généralisent à des sommes dont l'indice initial est autre que 0 ou 1.

Ces encadrement permettent aussi bien d'encadrer une intégrale par deux séries, que d'encadrer une série par deux intégrales.

• La suite $(S(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ci-dessous qui est croissante et majorée par une intégrale elle-même majorée par $3/2$ possède donc une limite finie. Le premier terme de la série est mis à part et la majoration précédente est mise en œuvre sur $[1, +\infty[$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0 \quad S_1 = 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{3}{2}$$

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^3} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = 1 - \left[\frac{1}{2x^2} \right]_1^n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{3}{2}$$

• Appliquer l'encadrement intégrale-série précédent sur $[1, +\infty[$ puis déterminer la limite des trois membres quand n tend vers $+\infty$ aboutit

à une minoration plus précise, $9/8$ à la place de 1 :

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x^3} dx = 1 + \left[\frac{1}{2x^2} \right]_2^{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{9}{8} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2}$$

- Une approximation encore plus précise de la limite peut être obtenue en calculant la somme des $N \in \mathbb{N}$ premiers termes, puis en encadrant le reste de la série par une intégrale :

$$\left[\frac{1}{2x^2} \right]_{N+1}^{n+1} = \int_{N+1}^{n+1} \frac{1}{x^3} dx \leq \sum_{k=N+1}^n \frac{1}{k^3} \leq \int_N^n \frac{1}{x^3} dx = \left[\frac{1}{2x^2} \right]_N^n$$

$$\frac{1}{2(N+1)^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^n \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2N^2} \quad \text{par passage à la limite en } n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^3} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^n \frac{1}{k^3}$$

pour toute valeur de N fixée

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2(N+1)^2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2N^2}$$

La précision de l'encadrement obtenu pour $N = 60$ est de l'ordre de 10^{-5} et permet d'obtenir les cinq premières décimales de cette limite :

$$1,20205 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < 1,20206$$

Directions asymptotiques

- Les directions asymptotiques du graphe d'une fonction f dérivable sur un voisinage de $\pm\infty$ sont obtenues à partir des limites de $f(x)/x$ en $\pm\infty$. Les propositions ci-dessous énoncent des conditions suffisantes pour les déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$$

- Le terme *direction asymptotique* désigne la direction éventuelle du graphe d'une fonction f lorsque x tend vers $\pm\infty$. Plus précisément si le point du graphe de f d'abscisse x est noté $M(x)$, la direction du vecteur $\mathbf{OM}(x)$ tend vers la direction asymptotique $\mathbf{u}_\ell$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, avec cette convention dans le cas particulier où $\ell = \pm\infty$:

$$\mathbf{OM}(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ x \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ \ell \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_{\pm\infty} = \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- La démonstration repose sur le théorème des accroissements finis. Une première étape consiste à effectuer cette démonstration dans le cas particulier où $\ell = 0$, et suppose $\varepsilon > 0$.

La première ligne exprime que la limite de f' est nulle en $+\infty$ à l'aide de $\varepsilon/4 > 0$ à la place de ε ; la seconde transforme le quotient $f(x)/x$ et les limites suivantes justifient l'existence de B et C en prenant $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon/2$ à la place de ε ; la dernière ligne termine la preuve :

$$\begin{aligned} & \exists A \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall u \in [A, +\infty[\quad |f'(u)| \leq \varepsilon/4 \\ & \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \left| \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \frac{x - A}{x} + \frac{f(A)}{x} \right| \\ & \leq \left| \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \right| \left| \frac{x - A}{x} \right| + \left| \frac{f(A)}{x} \right| \\ \forall x \in]A, +\infty[\quad & \exists c \in]A, x[\subset [A, +\infty[\quad \left| \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \right| = |f'(c)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - A}{x} = 1 & \implies \left(\exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq B \quad 1 - 1 \leq \frac{x - A}{x} \leq 1 + 1 \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(A)}{x} = 0 & \implies \left(\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq C \quad 0 \leq \left| \frac{f(A)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ \forall x \geq \max(A, B, C) \quad & \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \times 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

- La propriété démontrée dans le cas particulier $\ell = 0$ appliqué à la fonction auxiliaire $x \mapsto f(x) - \ell x$ montre cette proposition dans le cas général $\ell \in \mathbb{R}$.

La preuve pour les limites infinies est comparable à celle-ci.

La démonstration pour les limites en $-\infty$ se déduit de ce résultat en $+\infty$ par l'étude de la fonction auxiliaire $x \mapsto f(-x)$.

- Ce théorème détermine les limites des applications e^x/x et $\ln x/x$ en $+\infty$. La limite en $+\infty$ de $(\ln x)/x$ provient du théorème sur les

directions asymptotiques.

Applications convexes sur un intervalle

- Cette condition définit une application f convexe sur un intervalle I :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad f(tx + (1 - t)y) \leq t f(x) + (1 - t) f(y)$$

* La corde entre deux points du graphe d'une application convexe est placée au dessus du graphe de l'application.

La concavité du graphe d'une application convexe est orientée dans le sens des ordonnées croissantes, vers le haut.

Une application f est concave si et seulement si l'application opposée $-f$ est convexe.

- Ces deux autres propositions sont équivalentes et caractérisent aussi une application convexe pour tout $(a, b, c) \in I^3$:

$$a < b < c \implies \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

$$a < b < c \implies \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

- ◇ L'équivalence de ces deux séries d'inégalités provient du fait que le terme intermédiaire est une combinaison des deux autres :

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c) - f(b) + f(b) - f(a)}{c - a} \quad \left(\frac{b - a}{c - a}, \frac{c - b}{c - a} \right) \in [0, 1]^2$$

$$= \frac{c - b}{c - a} \frac{f(c) - f(b)}{c - b} + \frac{b - a}{c - a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \frac{b - a}{c - a} + \frac{c - b}{c - a} = 1$$

- ◇ Les rôles de x et y sont symétriques dans la définition initiale, et les cas particuliers $x = y$, $t = 0$ ou $t = 1$ n'ajoutent aucune condition à f . Il est alors possible de restreindre la définition à $x < y$ et $0 < t < 1$.

Ces deux propositions sont équivalentes à la première, en considérant $a = x$, $c = y$, $b = tx + (1 - t)y$ et $t = (c - b)/(c - a)$.

- Une application f définie sur un intervalle et dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.

- ◆ Une preuve consiste à appliquer le théorème des accroissements finis sur les segments $[a, b]$ et $[b, c]$ dans la caractérisation par une

inégalité des applications convexes.

Une preuve de la réciproque consiste à vérifier que la fonction φ est croissante à partir de l'encadrement caractéristique des applications convexes, et donc possède des limites finies à gauche et à droite en u qui sont les dérivées à gauche et à droite :

$$\begin{aligned} \varphi : I \setminus \{u\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \quad f'_g(u) = \lim_{\substack{x \rightarrow u \\ x < u}} \varphi(x) \leq f'_d(u) = \lim_{\substack{x \rightarrow u \\ x > u}} \varphi(x) \end{aligned}$$

* Toute application convexe sur un intervalle ouvert est continue car elle possède une dérivée à gauche et à droite en tout point du fait que les applications φ précédentes sont monotones.

* Une étude des dérivées justifie que les applications $x \mapsto x^2$ et $\exp$ sont convexes.

De même les applications $\sqrt{\bullet}$ et $\ln$ sont concaves.

Applications de la convexité

► Ces inégalités proviennent de la définition de la convexité :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &\leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} & e^{(x+y)/2} &\leq \frac{e^x + e^y}{2} \\ \sqrt{\frac{x+y}{2}} &\geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} & \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) &\geq \frac{\ln x + \ln y}{2} = \ln \sqrt{xy} \end{aligned}$$

Ces égalités illustrent l'inégalité des applications convexes avec x, y et $t = 1/2$.

□ Ces conditions sur les familles $(a_k)_{k=1}^n$ et $(x_k)_{k=1}^n$ entraînent que toute application convexe f sur I vérifie cette inégalité :

$$\begin{aligned} (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}_+^n \quad \sum_{k=1}^n a_k = 1 \quad (x_k)_{k=1}^n \in I^n \\ \text{donc} \quad f\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \end{aligned}$$

◇ L'inégalité sur n se démontre par récurrence, en transformant les termes x_{n-1} et x_n en terme en u de poids $a_{n-1} + a_n$ pour y appliquer la définition d'une application convexe :

$$u = \frac{a_{n-1}x_{n-1} + a_n x_n}{a_{n-1} + a_n} \in I$$

$$(a_{n-1} + a_n)f(u) \leq a_{n-1}f(x_{n-1}) + a_n f(x_n)$$

* La formule précédente appliquée à la fonction $-\ln$ et à $a_k = 1/n$ démontre l'inégalité des moyennes arithmétique A et géométrique G ; celle des moyennes harmoniques H provient d'un calcul d'inverse :

$$A = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \geq G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \geq H = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}$$

► De même la convexité des applications $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^{q/p}$ lorsque $0 < p < q$ justifie ces inégalités de convexité :

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}} \quad \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{n} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k^q}{n} \right)^{1/q}$$

Ces inégalités généralisent à n termes les inégalités à 2 termes obtenues à partir de la définition des applications convexes.

Formule de Taylor-Larange

► Toute application f qui est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]a, b[$ vérifie la propriété ci-dessous; la démonstration repose sur l'application du théorème de Rolle à une fonction auxiliaire :

$$\exists c \in]a, b[\quad f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

► Le paramètre $A \in \mathbb{R}$ de la fonction auxiliaire g , dont la dérivée se simplifie, est défini de façon à avoir $g(a) = g(b)$.

L'application g vérifie les hypothèses de continuité et de dérivabilité du théorème de Rolle, et il existe $c \in]a, b[$ telle que $g'(c) = 0$:

$$g(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$g(b) = f(b) \quad g(a) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
g(b) = g(a) &\iff A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \\
&g'(c) \\
&= f'(c) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-c)^k}{k!} f^{(k+1)}(c) - \frac{k(b-c)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(c) \\
&\quad - A \frac{(n+1)(b-c)^n}{(n+1)!} \\
&= f'(c) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-c)^k}{k!} f^{(k+1)}(c) - \frac{(b-c)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(c) - A \frac{(b-c)^n}{n!} \\
&= f'(c) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-c)^k}{k!} f^{(k+1)}(c) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-c)^k}{k!} f^{(k+1)}(c) - A \frac{(b-c)^n}{n!} \\
&= \frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) - A \frac{(b-c)^n}{n!}
\end{aligned}$$

La fin de la démonstration de la propriété de Taylor-Lagrange repose sur le lien entre cette dernière égalité, la valeur de A et les conclusions du théorème de Rolle :

$$\begin{aligned}
c \in]a, b[\quad &b - c \neq 0 \quad g'(c) = 0 \\
f^{(n+1)}(c) = A &= \frac{f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} \\
f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \\
f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) &+ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)
\end{aligned}$$