SÉRIES NUMÉRIQUES

Définition des séries

• La série $\sum_n u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \in \mathbb{R}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

La valeur d'un terme de la série est donc $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$.

• Par définition la série $\sum_n u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles converge avec ces notations :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n \in \mathbb{R}$$

$\ast$ Réciproquement, toute suite peut s'écrire comme une série de différences $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_n (u_n - u_{n-1})$ avec la convention $u_{-1} = 0$.

$\ast$ L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ contient donc toutes les suites et séries. L'ensemble $\mathcal{C}$ des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

L'application $\sum_n u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{R})$, par linéarité des limites.

La notation $\sum_n u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'est pas une application définie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est incohérente pour une série qui ne converge pas.

■ Cette implication donne une condition nécessaire de convergence, appelé critère trivial de convergence :

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

◊ La démonstration repose directement sur la convergence des deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles vers la même limite $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} -S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

$\ast$ En général la contraposée est appliquée pour montrer qu'une série diverge.

■ Toute série à terme général positif est croissante.
une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.

◊ Nous supposons donc tous les termes $u_n \geq 0$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles, c'est-à-dire la série, est une suite croissante : $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$.
Nous appliquons le théorème de la *limite-monotone* : une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée. Cette propriété sur les séries est la traduction de ce théorème sur les suites.

■ si la suite $(a_n)_n$ est décroissante et de limite nulle, donc positive, alors la série $\sum_n (-1)^n a_n$, appelée série alternée, est convergente.

◊ Les suites extraites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes, donc de même limite. Vérifions les trois hypothèses des suites adjacentes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

$$\begin{aligned}
S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
&= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \qquad (S_{2n})_n \text{ est décroissante} \\
S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\
&= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \qquad (S_{2n})_n \text{ est croissante} \\
S_{2n+1} - S_{2n} &= -a_{2n+1} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0
\end{aligned}$$

Les deux suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont donc adjacentes, par le théorème des suites adjacentes elles convergent vers la même limite. Ensuite ces deux suites sont les suites extraites des termes d'ordre pair et impair, donc la suite $(S_n)_n$ converge vers cette limite. En conclusion la série $\sum_n (-1)^n a_n$ converge.

Formule de Taylor reste intégral

$*$ Lorsque l'application f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ une intégration par parties dérivant $f^{(n)}(t)$ justifie cette égalité :

$$\begin{aligned}&\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Vous remarquons que les deux intégrales ont la même structure, en remplaçant n par $n+1$.

■ La formule de Taylor avec reste intégral énonce cette égalité pour toute application f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ entre a et b :

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$*$ La partie principale de la formule est la même que celle des développements limités de Taylor-Young. Le reste est différent.
Pour un développement limité dans la formule de Taylor-Young le reste est, une fois n fixé, en $\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ la limite pour x qui tend vers a.
Au contraire cette formule de Taylor reste intégral permet de calculer des limites de séries en fonction de $f(b)$ quand $n\in\mathbb{N}$ tend vers $+\infty$.
La formule de Taylor pour $n=0$ correspond à la définition de la primitive d'une dérivée :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$*$ La formule de Taylor est symétrique, et valable dans les deux cas $a \leq b$ et $b \leq a$. Dans un cas l'intervalle d'étude est $[a,\, b]$ et dans l'autre $[b,\, a]$.

◊ La preuve par récurrence repose sur les intégrations par parties de la remarque initiale. La formule est vérifiée à l'ordre 0 :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

La formule à l'ordre n découle de celle à l'ordre $n-1$ par la remarque initiale :

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\\ &\quad + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Critère de d'Alembert des séries géométriques

★ Soit $q \in \mathbb{R}_+$, ces séries géométriques sont à termes positifs, cela démontre ces résultats :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1\\ n+1 & \text{si } q = 1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{si } 0 \leq q < 1\\ +\infty & \text{si } q \geq 1\end{cases}$$

La série géométrique à termes positifs converge quand $q < 1$, elle diverge vers $+\infty$ si $q \geq 1$.

■ Le crière de d'Alembert des séries $\sum_n u_n$ à termes strictement positifs $u_n > 0$ énonce :
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1 \Longrightarrow \sum_n u_n$ converge
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1 \Longrightarrow \sum_n u_n$ diverge trivalement

◊ La démonstration se fait à partir des séries géométriques, par comparaison à partir d'un certain rang N d'une série géométrique et de la série étudiée.
Dans le premier cas si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, alors pour $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$ il existe un rang N à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon = \dfrac{1+\ell}{2} = q < 1$, d'où ces majorations :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{u_{N+1}}{u_N} \leq q & 0 < u_{N+1} \leq q u_N \\ \dfrac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \leq q & 0 < u_{N+2} \leq q u_{N+1} \leq q^2 u_N \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq q & 0 < u_n \leq q u_{n-1} \leq q^{n-N} u_N \end{array}$$

Ces inégalités aboutissent donc à la majoration de la série croissante $\sum_{n\geq N} u_n$ à partir du rang N.

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \leq u_N \sum_{k=0}^{n-N} q^k = u_N \frac{1-q^{n-N+1}}{1-q} \leq \frac{u_N}{1-q}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + u_N \sum_{k=0}^{n-N} q^k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + u_N \frac{1-q^{n-N+1}}{1-q} \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \frac{u_N}{1-q} \end{aligned}$$

La série $\sum_n u_n$ est donc majorée, sous-entendu de façon indépendante de $n \in \mathbb{N}$, même si cette majoration dépend de N et $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2} > 0$.
La série $\sum_n u_n$ est à termes positifs donc croissante, et majorée, elle converge donc.
Dans le second cas si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$, la démonstration est du même genre, en échangeant le sens des inégalités.

Dans ce cas $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2} > 0$ et il existe un rang N à partir duquel le quotient vérifie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon = \dfrac{\ell+1}{2} = q > 1$, d'où ces majorations :

$$\begin{array}{ll} \dfrac{u_{N+1}}{u_N} \geq q & u_{N+1} \geq q u_N > 0 \\ \dfrac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \geq q & u_{N+2} \geq q u_{N+1} \geq q^2 u_N > 0 \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \geq q & u_n \geq q u_{n-1} \geq q^{n-N} u_N > 0 \end{array}$$

Ces inégalités aboutissent donc à la minoration de la série croissante $\sum_{n\geq N} u_n$ à partir du rang N.

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \geq u_N \sum_{k=0}^{n-N} q^k = u_N \frac{q^{n-N+1}-1}{q-1} \geq \frac{q u_N}{q^N(1-q)} q^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \geq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + u_N \sum_{k=0}^{n-N} q^k \geq \frac{q u_N}{q^N(q-1)} q^n$$

La série $\sum_n u_n$ est donc minorée par une suite $(q^n)_n$ qui diverge vers $+\infty$. La constante est strictement positive. La série $\sum_n u_n$ est à termes positifs donc croissante et n'est pas majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.

$*$ Si $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = \ell = 1$ alors $\sum_n u_n$ ne permet pas de conclure.
La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge et la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge vers $\pi^2/6$.
Le critère de d'Alembert sert plus aux expressions avec des exponentielles $\bullet^n$ que des puissances $n^\bullet$.

Comparaisons des séries à termes positifs

$*$ Ces théorèmes appliquent les théorèmes de comparaison des limites de suites aux séries :

■ Dans le cas $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_n v_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_n u_n \text{ converge ET } 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$$

$$\sum_n u_n \text{ diverge} \Longrightarrow \sum_n v_n \text{ diverge, c'est-à-dire ne converge pas,}$$

◊ La démonstration repose sur les inégalités sur les sommes partielles qui sont des suites croissantes pour lesquelles la convergence équivaut au fait d'être majorées.

□ Dans le cas où $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang N

$$\sum_n v_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_n u_n \text{ converge}$$

◊ La démonstration repose sur le théorème précédent sur es sommes $\sum_{n \geq N} u_n$ à partir du rang N.

$*$ Ce théorème ne donne aucune inégalité sur les valeurs de ces sommes car les premiers termes ne vérifient pas nécessairement une inégalité pertinente.

■ Dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et sont à valeurs positives, autrement dit : $\exists (N, M) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}+ \quad \forall n \geq N \quad u_n \leq M v_n$.

$$\sum_n v_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_n u_n \text{ converge}$$

$$\sum_n u_n \text{ diverge} \Longrightarrow \sum_n v_n \text{ diverge}$$

◊ La démonstration reprend le théorème précédent avec la suite $(M v_n)_n$ à la place de $(v_n)_n$.

⊠ Si deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors à partir d'un certain rang N ces suites sont exactement du même signe. Il existe $N \in N$ tel que tout $n \geq N$:

$$0 \leq u_n \Longleftrightarrow 0 \leq v_n \qquad 0 = u_n \Longleftrightarrow 0 = v_n \qquad 0 \geq u_n \Longleftrightarrow 0 \geq v_n$$

◊ Reprenons la définitions de deux suites équivalentes ou négligeables sans faire intervenir le quotient u_n/v_n :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \varepsilon |b_n|$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

Vérifions que $\varepsilon = 1/2 > 0$ donne $N \in \mathbb{N}$ qui convient pour comparer les signes de u_n et v_n :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } v_n > 0 : -\dfrac{v_n}{2} \leq u_n - v_n \leq \dfrac{v_n}{2} & 0 < \dfrac{v_n}{2} \leq u_n \leq \dfrac{3v_n}{2} \\ \text{Si } v_n = 0 : -\dfrac{v_n}{2} \leq u_n - v_n \leq \dfrac{v_n}{2} & u_n = 0 \\ \text{Si } v_n < 0 : \dfrac{v_n}{2} \leq u_n - v_n \leq \dfrac{-v_n}{2} & \dfrac{3v_n}{2} \leq u_n \leq \dfrac{v_n}{2} < 0 \end{array}$$

Dans les trois cas le signe de v_n entraîne celui de u_n, exactement le même.

■ Dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que l'une des suites est à valeurs positives,

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_n v_n \text{ converge}$$

$$\sum_n v_n \text{ diverge} \Longleftrightarrow \sum_n u_n \text{ diverge}$$

◊ les deux suites sont alors positives à partir d'un certain rang, et l'équivalence provient de $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

Comparaison avec une intégrale

■ Le théorème de comparaison d'une intégrale $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ et de la série $\sum_n f(n)$ s'applique à une application f décroissante, positive et de limite nulle :

$$0 \leq f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n-1)$$

$$0 \leq \sum_{n=p+1}^{q+1} f(n) \leq \int_p^{q+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p}^{q} f(n) \leq \int_{p-1}^{q} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p-1}^{q-1} f(n)$$

la suite des intégrales $\int_u^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et la série $\sum_n f(n)$ sont croissantes,
La série converge si et seulement si l'intégrale, c'est-à-dire la série, sont majorées. Le passage à la limite, finie ou infinie, aboutit à ces résultats :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_u^n f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_n f(n) \text{ converge}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{n=p}^{+\infty} f(n) \le \lim_{n\to+\infty}\int_{p-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} f(n) \le \lim_{n\to+\infty}\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{n=p}^{+\infty} f(n)$$

$\ast$ Cette équivalence repose sur l'encadrement des sommes partielle par deux intégrales, et l'encadrement d'une intégrale par deux sommes partielles.

■ La série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

◊ La démonstration repose sur l'étude de la limite de l'intégrale $\int \frac{1}{t^a}\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$. Dans le premier cas si $a > 1$, $n\in\mathbb{N}$ et $n \ge 2$:

$$\frac{1}{n^a} \le \int_{n-1}^n \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{(a-1)t^{a-1}}\right]_{n-1}^n$$

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^a} \le \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)n^{a-1}} \le \frac{1}{a-1} < +\infty$$

La série est à termes positifs et est majorée, donc est croissante et converge. Dans le deuxième cas si $0 < a < 1$, $n\in\mathbb{N}$ et $n \ge 2$:

$$\left[(1-a)t^{1-a}\right]_n^{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t \le \frac{1}{n^a}$$

$$(1-a)((N+1)^a - 1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t \le \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^a}$$

La limite du terme de gauche est $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$. La série diverge donc. Dans le troisième cas si $a = 1$ l'intégrale est un logarithme et la série, appelée série harmonique, diverge aussi :

$$[\ln t]_n^{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \le \frac{1}{n}$$

$$\ln(N+1) - \ln 1 = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \le \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

La limite du terme de gauche est $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$. La série diverge donc.
Si $a \le 0$ alors la série diverge, en appliquant le critère trivial de divergence des série. Le terme général $u_n = n^{-a}$ est constant égal à 1 ou tend vers $+\infty$, et ne tend pas vers 0. La série $\sum_n \frac{1}{n^a} = \sum_n n^{-a}$ diverge trivialement.

★ La série harmonique $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, sa somme est $\pi^2/6$.

Séries réelles et complexes

• Cas des séries réelles et complexes :
Par définition l'absolue convergence de la série $\sum_n u_n$ signifie que la série des valeurs absolues $\sum_n |u_n|$ converge,

■ L'absolue convergence entraîne la convergence.

★ La réciproque est fausse $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

◊ dans le cas réel $0 \le |u|_n + u_n \le 2|u_n|$. Les théorèmes de comparaison permettent de conclure.
dans le cas complexe $|\operatorname{re}(u_n)| \le |u|_n$ et $|\operatorname{im}(u_n)| \le |u_n|$, l'étude des parties réelles et des imaginaires de ces sommes partielles permettent de conclure.

Exemples de séries

Convergence ou non d'une série

▷ exemple de la série harmonique où la réciproque est fausse par la divergence de la suite extraite $(H_{2^n})_n$

$$(H_n)_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \qquad \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{pour } k \in [\![2^n+1, 2^{n+1}]\!]$$

$$H_{2^{n+1}} - H_{2^n} = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{2^{n+1} - (2^n+1) + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$H_{2^n} - H_1 = \sum_{k=1}^{n} H_{2^k} - H_{2^{k-1}} \geq \frac{n}{2} \quad \text{donc } \frac{n}{2} + 1 \leq H_{2^n} \text{ diverge vers } +\infty$$

▷ Par des équivalents et des développements limités, $\sum_{n\geq 1} \ln(1+n^{-1}) - n^{-1}$ converge, $\sum_{n\geq 1} \ln(1+n^{-1/2}) - n^{-1/2}$ diverge.

▷ Par comparaison avec une intégrale, sur le même principe que les séries de Riemann $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, par le changement de variable dans l'intégrale $u = \ln t$, et $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

▷ En appliquant ou redémontrant le théorème des séries alternées vérifier que les séries $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\exp(n^2)}$ convergent. Préciser un encadrement de ces limites en fonction des n premiers termes de ces sommes partielles. Pour quelles valeurs de n l'encadrement de la limite est inférieur à 10^{-2} et 10^{-8}, préciser un ordre de grandeur du temps de calcul de ces sommes pour une machine effectuant 10^9 opérations par seconde.

Calculs de séries convergentes

Séries télescopiques

► Calculer cette série par une décomposition en éléments simples :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

À l'aide de la formule de Taylor reste intégral

► La formule de Taylor avec reste intégral appliquée sur $[0,\, a]$ permet d'encadrer e^a pour tout $a \geq 0$.

▷ L'encadrement $1 \leq e^t \leq e^a$ du au fait que l'application exp est croissante aboutit à l'encadrement du reste intégral de la formule de Taylor :

$$\exp^{(k)} t = \exp t \qquad \exp^{(k)} 0 = e^0 = 1 \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} e^a &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k \exp^{(k)} 0}{k!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)} t \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t \,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \quad \text{minore } e^a \end{aligned}$$

$$\int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t \,\mathrm{d}t \leq \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^a \,\mathrm{d}t = e^a \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^a = \frac{a^{n+1} e^a}{(n+1)!}$$

$$e^a \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^{n+1}\, e^a}{(n+1)!} \qquad \left(1 - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right) e^a \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \leq e^a \leq \frac{(n+1)!}{(n+1)! - a^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)! - a^{n+1}} = 1 \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

La suite $\left(a^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $((n+1)!)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$, d'où la dernière limite de valeur 1.

∗ Si par exemple $a = 1$ l'encadrement précédent pour $n = 10$ aboutit à l'approximation $2,7182818 < e < 2,7182819$ à 10^{-7} près.

∗ Si $b = -a > 0$, cette formule de Taylor aboutit à l'encadrement suivant où I_n est le reste de la formule de Taylor de l'application exponentielle sur $[b,\, 0]$ en 0 à l'ordre n où l'application exponentielle est dérivée $n+1$ fois, du même signe que $(-1)^{n+1}$.

$$I_n = \int_0^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,(-1)^{n+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$|I_n| \leq \int_0^b \frac{|b-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{2p+1} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \leq e^{-a} \leq \sum_{n=0}^{2p} \frac{(-1)^n a^n}{n!}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} = e^{-a} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$
$f(t) = e^{-t}$, $f^k(t) = (-1)^k\, e^{-t}$ sur $[0,\, 1]$ ou $[0,\, x]$ quand $x > 0$,

▶ Étudier la convergence et calculer la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ en s'aidant de l'application $f : x \mapsto \ln(1+x)$ par la formule de Taylor reste intégral.

▷ La formule de Taylor reste intégral de la fonction précédente aboutit à la formule demandée :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = f(b) - \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$
avec $f(t) = \ln(1+t)$ sur $[0,\, 1]$:$f^{(k)}(t) = \dfrac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{(1+t)^k}$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\,(k-1)! \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}$$
$$I_n = \int_0^1 f^{(n+1)}(t)\,\frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-1)^n\,n!}{(1+t)^{n+1}}\,\frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$
$$|I_n| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 + I_n \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$$

Autour des séries géométriques

▶ La dérivation des sommes partielles d'une série géométrique détermine $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$:

$$\text{pour } |q| < 1 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$
$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \Big(\sum_{k=0}^{n} q^{k-1}\Big)' = \frac{1}{1-q} - \frac{(n+1)q^n - nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$
$$\sum_{k=0}^{n} kq^k = q\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$$