LES NOMBRES

Vocabulaire des lois de composition interne

Dans cette partie E est un ensemble et $(x,y,z,t)\in E^4$.

• Une loi de composition interne $\star$ (abrégée en lci) est une application f de $E\times E$ dans E qui est notée $x\star y=f(x,y)$.

∗ L'addition est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, et la soustraction est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{lll} +:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N} & +:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z} & -:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z} \\ \quad (x,y)\longmapsto x+y & \quad (x,y)\longmapsto x+y & \quad (x,y)\longmapsto x-y \end{array}$$

Au contraire la soustraction n'est pas une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$: $2-3$ n'est pas défini dans $\mathbb{N}$.

∗ La loi de composition interne $+$ sur $\mathbb{N}$ peut s'écrire avec le quantificateur universel $\forall$ se lisant *quel que soit...* ou *pour tout...* ; la négation montrant que la soustraction n'est pas une loi de composition interne fait intervenir le quantificateur existentiel $\exists$ se lisant *il existe...* par exemple avec $x=2$ et $y=3$:

$$\forall x\in\mathbb{N}\ \ \forall y\in\mathbb{N}\ \ x+y\in\mathbb{N} \qquad\qquad \exists x\in\mathbb{N}\ \ \exists y\in\mathbb{N}\ \ x-y\notin\mathbb{N}$$

• Les lois de composition interne peuvent être caractérisées par les propositions suivantes :

commutative	$\forall(x,y)\in E^2$	$x\star y=y\star x$
associative	$\forall(x,y,z)\in E^3$	$x\star(y\star z)=(x\star y)\star z$
$e\in E$ est un élément neutre	$\forall x\in E$	$x\star e=e\star x=x$
$u\in E$ est un élément régulier	$\forall(x,y)\in E^2$	$x\star u=y\star u\Longrightarrow x=y$
	ET	$u\star x=u\star y\Longrightarrow x=y$
$a\in E$ est un élément absorbant	$\forall x\in E$	$x\star a=a\star x=a$

∗ L"addition $+$ et la multiplication $\times$ de nombres sont des lois commutatives et associatives ; au contraire la puissance ˆ de nombres n'est ni commutative ni associative car il existe des nombres pour lesquels les égalités ne sont pas vérifiées :

$$x+y=y+x \qquad x\times y=y\times x \qquad 2^3=8\neq 3^2=9$$
$$x+(y+z)=(x+y)+z \qquad x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$$
$$2^{(3^2)}=2^9=512\neq(2^3)^2=8^2=64$$

∗ Le nombre 0 est élément neutre pour l'addition, et le nombre 1 est élément neutre pour pour la multiplication :

$$x+0=0+x=x \qquad 1\times x=x\times 1=x$$

∗ L'associativité de la loi $\star$ rend cohérente la notation sans parenthèse $x\star y\star z$ à la place $(x\star y)\star z=x\star(y\star z)$.
L'associativité s'étend à un nombre quelconque de termes en les regroupant trois par trois :

$$(\underline{x}\star\underline{y})\star\underline{(z\star t)}=x\star(y\star(z\star t))=x\star((y\star z)\star t)=x\star(y\star z)\star t$$

• La loi $\star$ est dite régulière lorsque tout élément de E est régulier.

∗ Tout nombre u est régulier pour l'addition, et tout nombre v non nul est régulier pour la multiplication :

$$u+x=u+y\Longrightarrow x=y \qquad v\neq 0\ \text{ET}\ v\times x=v\times y\Longrightarrow x=y$$

∗ Le nombre 0 est élément absorbant pour la multiplication et n'est pas régulier :

$$0\times x=x\times 0=0 \qquad 1\times 0=2\times 0=0\ \text{ET}\ 1\neq 2$$

• La loi $\star$ est distributive par rapport à la loi de composition interne $\perp$ à cette condition :

$$\forall(x,y,z)\in E^3 \qquad x\star(y\perp z)=(x\star y)\perp(x\star z)$$
$$\text{ET}\ (x\perp y)\star z=(x\star z)\perp(y\star z)$$

∗ La multiplication $\times$ est distributive par rapport à l'addition $+$; la puissance n'est pas distributive par rapport à la multiplication, elle est distributive à gauche et n'est pas distributive à droite :

$$x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z) \qquad (x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$$
$$(x\times y)^z=(x^z)\times(y^z) \qquad 2^{2\times 3}=2^6=64\neq(2^2)\times(2^3)=4\times 8=32$$

• Lorsque $e\in E$ est élément neutre pour la loi $\star$, l'élément $\widetilde{x}\in E$ est symétrique de $x\in E$ si et seulement si $x\star\widetilde{x}=\widetilde{x}\star x=e$.
Dans ce cas x est dit inversible pour la loi de composition interne $\star$.

∗ Le nombre entier $-3\in\mathbb{Z}$ est le symétrique de 3 pour l'addition dans $\mathbb{Z}$; de même le nombre rationnel $1/3 \in \mathbb{Q}$ est le symétrique de 3 pour la multiplication dans $\mathbb{Q}$:

$$3 - 3 = 0 \qquad 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

Au contraire le nombre entier $3 \in \mathbb{Z}$ n'a pas de symétrique pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$: l'équation $3 \times x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

★ La commutativité de la loi $\star$ permet de définir la régularité, l'élément neutre, l'élément absorbant, le symétrique et la distributivité par une seule égalité à la place de deux.
Si au contraire la loi $\star$ n'est pas commutative, alors les deux égalités des définitions sont nécessaires.

Opérations sur les nombres

Propriétés communes des opérations

Le premier paragraphe ci-dessous énumère sans les démontrer les propriétés de base des nombres réels, et les suivants justifient les autres propriétés des opérations sur $\mathbb{R}$ à partir de celles-là.
Dans la suite de cette partie x, y, z et t sont des nombres réels, n est un entier, et $(x_k)_{k=1}^n$ et $(y_k)_{k=1}^n$ sont deux familles finies de nombres.

Propriétés de base des opérations

■ L'addition $+$ est une loi de composition interne commutative et associative dont l'unique élément neutre est 0.
Tout nombre réel x possède un unique symétrique pour l'addition, il est appelé opposé de x et est noté $-x$.

■ La multiplication $\times$ est une loi de composition interne commutative, associative et d'unique élément neutre $1 \neq 0$.
Tout nombre réel x non nul possède un unique symétrique pour la multiplication, il est appelé inverse de x et est noté $1/x$.
La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

$*$ Ces propriétés caractérisent la structure de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

⊠ L'addition est une loi de composition régulière.
Tout élément inversible est régulier pour la multiplication.

◊ Additionner l'opposé $-x$ démontre que x est régulier pour l'addition :

$$\begin{aligned} x + y = x + z &\Longrightarrow (-x) + (x + y) = (-x) + (x + z) \\ &\Longrightarrow ((-x) + x) + y = ((-x) + x) + z \\ &\Longrightarrow y = 0 + y = 0 + z = z \end{aligned}$$

La commutativité de l'addition évite la preuve de l'autre implication :

$$\begin{aligned} x + z = y + z &\Longrightarrow z + x = z + y \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

◊ Si x est inversible, l'hypothèse $xy = xz$ entraîne $y = z$:

$$\begin{aligned} x \times y = x \times z &\Longrightarrow \frac{1}{x} \times (x \times y) = \frac{1}{x} \times (x \times z) \\ &\Longrightarrow \Big(\frac{1}{x} \times x\Big) \times y = \Big(\frac{1}{x} \times x\Big) z \\ &\Longrightarrow y = z \end{aligned}$$

La commutativité de la multiplication entraîne l'autre égalité.

■ Ce formulaire traduit les propriétés générales des éléments neutres et des symétriques pour l'addition et de la multiplication :

$$-0 = 0 \qquad -(-x) = x \qquad -(x + y) = (-x) + (-y) \text{ abrégé en } -x-y$$

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad \frac{1}{x \times y} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{y} \quad \text{pour } x \text{ et } y \text{ non nuls}$$

◊ L'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication prouve ces propriétés, par exemple :

$$\begin{aligned} &(x \times y) \times \Big(\frac{1}{x} \times \frac{1}{y}\Big) = \Big(\frac{1}{x} \times \frac{1}{y}\Big) \times (x \times y) \\ &= \Big(x \times \frac{1}{x}\Big) \times \Big(y \times \frac{1}{y}\Big) = 1 \times 1 = 1 \qquad \text{donc } \frac{1}{x} \times \frac{1}{y} = \frac{1}{x \times y} \end{aligned}$$

$*$ Les propriétés de cette forme sont étudiées en toute généralité dans la dernière partie de ce chapitre.

■ Le nombre 0 est absorbant pour le produit, n'est pas régulier et n'a pas d'inverse :

$$\frac{1}{x} \neq 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0 \qquad xy = 0 \iff (x = 0 \text{ OU } y = 0)$$

◊ L'égalité $0 \times x = 0$ provient du fait que 0 est élément neutre pour l'addition associé à la régularité de la somme :

$$\underline{0} + 0x = 0x = (0+0)x = \underline{0x} + 0x \Longrightarrow 0 = 0x$$

◊ L'égalité $0 \times 1 = 0 \times 0 = 0$ prouve que le nombre 0 n'est pas régulier pour la multiplication car $1 \neq 0$.

◊ La propriété qui énonce que *tout élément inversible est régulier pour la multiplication* justifie donc 0 n'est pas inversible car 0 n'est pas régulier.

◊ Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $x \times y = 0$ car le nombre 0 est absorbant :

$$x = 0 \text{ OU } y = 0 \Longrightarrow x \times y = 0$$

Réciproquement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors x et y sont inversibles, donc $x \times y$ admet un inverse et par conséquent $x \times y \neq 0$. Cette implication est la contraposée de l'implication recherchée obtenue à partir des négations et de l'échange des deux termes de l'implication ; ces deux implications sont logiquement équivalentes :

$$\begin{array}{rl} & x \neq 0 \text{ ET } y \neq 0 \Longrightarrow x \times y \neq 0 \\ \text{c'est-à-dire} & \text{NON}\,(x \times y \neq 0) \Longrightarrow \text{NON}\,(x \neq 0 \text{ ET } y \neq 0) \\ \text{c'est-à-dire} & x \times y = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ OU } y = 0 \end{array}$$

■ Ces égalités usuelles découlent de la distributivité et de la régularité :

$$-(x \times y) = (-x) \times y = x \times (-y) \qquad -x = (-1) \times x$$

La suite du cours utilise les notations algébriques habituelles ; le signe $\times$ peut être omis dans un produit, par exemple $xy = x \times y$, et la multiplication est prioritaire sur l'addition comme dans l'égalité $xy + zt = (xy) + (zt)$.

◊ La régularité de l'addition et la distributivité de la multiplication prouvent les premières égalités :

$$\left\{\begin{array}{l} \quad x \times y + (\underline{-(x \times y)}) = 0 \\ = 0 \times y = (x + (-x))y = x \times y + \underline{(-x) \times y} \\ = x \times 0 = x(y + (-y)) = x \times y + \underline{x \times (-y)} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow -(x \times y) = (-x) \times y = x \times (-y)$$

Le valeur particulière $y = 1$ justifie $-x = (-1)x$.

∗ Aucun calcul ne peut être fait avec l'inverse de 0 qui n'est pas défini.

▷ Résolution de l'équation $a^2x + 1 = a + x$ d'inconnue réelle x en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

▷▷ L'ensemble des solutions est noté $\mathcal{S}$:

$$a^2x + 1 = a + x \iff (a^2 - 1)x = a - 1$$

$$\begin{array}{rll} \text{Si } a = 1 : & 0 = 0 \text{ est valable pour tout } x & \mathcal{S} = \mathbb{R} \\ \text{Si } a = -1 : & 0 = -2 \text{ est sans solution} & \mathcal{S} = \emptyset \\ \text{Si } a \neq \pm 1 : & \text{une seule solution } x = \dfrac{a-1}{a^2-1} = \dfrac{1}{a+1} & \mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{a+1}\right\} \end{array}$$

Puissances d'exposant entier

• Dans le cas où $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ les puissances d'exposant entier sont définies ainsi, sauf 0^p qui n'est pas défini si $p < 0$:

$$x^p = \left\{\begin{array}{rl} x \times x \times x \times \cdots \times x & \text{produit de } p \text{ facteurs pour } p > 0 \\ 1 & \text{pour } p = 0, \text{ y compris } 0^0 = 1 \\ \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x} \times \cdots \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^{-p}} & \text{pour } p < 0, \text{ sauf si } x = 0 \end{array}\right.$$

■ Le nombre de termes de ces produits se traduit par ces égalités :

$$(xy)^p = x^p y^p \quad x^p x^q = x^{p+q} \quad (x^p)^q = x^{pq} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^p = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$$

◊ Une démonstration rigoureuse de ces égalités s'effectue par récurrence sur p ou q en distinguant selon que les exposants sont positifs ou négatifs.

∗ La notation x^{p^q} signifie $x^{(p^q)}$; au contraire $(x^p)^q = x^{pq}$.

∗ Les formules habituelles des puissances entières $p \in \mathbb{Z}$ de -1 découlent de l'égalité $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$:

$$(-1)^p = (-1)^{p\pm 2} = (-1)^{3p} = (-1)^{-p} = -(-1)^{p\pm 1}$$
$$(-1)^{2p} = 1 = (-1)^0 \qquad (-1)^{2p\pm 1} = -1 = (-1)^{\pm 1}$$

Sommes et produits

• Ces notations correspondent à la somme et au produit d'une famille finie de nombres :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad \prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$
$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$$

★ Par convention une somme d'un élément est celui-ci, et une somme vide est égale à zéro, l'élément neutre de l'addition ; les notations pour les produits sont similaires et justifient la notation $0! = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1 \quad \sum_{k=1}^{0} x_k = 0 \quad \prod_{k=1}^{1} x_k = x_1 \quad \prod_{k=1}^{0} x_k = 1 \quad 0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$$

∗ La valeur d'une somme ne dépend pas de l'indice employé, k ici :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

∗ L'associativité, la commutativité et la distributivité se généralisent à des sommes et des produits d'une famille finie de nombres :

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad \prod_{k=1}^{n}(x_k y_k) = \prod_{k=1}^{n} x_k \times \prod_{k=1}^{n} y_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \prod_{k=1}^{n} x_{n+1-k} = \prod_{k=1}^{n} x_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} x y_k = x \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Une démonstration rigoureuse s'effectue par récurrence sur n.

∗ Cet exemple représente plus naïvement une somme précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k} = x_n + x_{n-1} + \cdots + x_2 + x_1 \qquad \text{par commutativité}$$
$$= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

▷ La somme des entiers entre 1 et $n \in \mathbb{N}$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

⊳⊳ Une écriture colonne par colonne de cette somme d'entiers consécutifs permet, grâce à la commutativité de l'addition, d'obtenir sa valeur :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \quad 2 \quad + \cdots + (n-1) + n \qquad 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + \cdots + \quad 2 \quad + 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

▷ Déduire ces deux sommes d'entiers pairs et d'entiers impairs de la somme précédente des entiers consécutifs :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad S = \sum_{k=1}^{n}(2k) \qquad T = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

⊳⊳ Une factorisation et un développement transforment ces sommes :

$$S = \sum_{k=1}^{n}(2k) = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$
$$T = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$$

▷ Les produits des entiers pairs et impairs s'expriment par des factoriels :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\, n! \qquad \prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$$

⊳⊳ Le nombre 2 se factorise dans chaque terme de ce produit d'entiers pairs ; le produit des entiers impairs se déduit du produit précédent par un quotient :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n\, n!$$
$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$$

▷ Un changement d'indice aboutit à la simplification de ces produits :

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)=n+1 \qquad \prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k}\Big)=\frac{1}{n}$$

$$\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big)=\frac{n+1}{2n} \qquad \prod_{k=3}^{n}\Big(1-\frac{4}{k^2}\Big)=\frac{(n+1)(n+2)}{6n(n-1)}$$

⊳⊳ La premier produit correspond à ce quotient :

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod_{j=2}^{n+1}j}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{n+1}{1}=n+1$$

Le deuxième produit est similaire :

$$\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k}\Big)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k}=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}k}{\prod_{k=2}^{n}k}=\frac{1}{n}$$

Un produit remarquable intervient dans le troisième :

$$\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\times\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\Big(\prod_{k=2}^{n}k\Big)^2}=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}k\times\prod_{k=3}^{n+1}k}{\Big(\prod_{k=2}^{n}k\Big)^2}=\frac{n+1}{2n}$$

Le décalage des indices est de deux dans le dernier produit :

$$\prod_{k=3}^{n}\Big(1-\frac{4}{k^2}\Big)=\prod_{k=3}^{n}\frac{k^2-4}{k^2}=\prod_{k=3}^{n}\frac{(k-2)(k+2)}{k^2}$$

$$=\frac{\prod_{k=3}^{n}(k-2)\times\prod_{k=3}^{n}(k+2)}{\Big(\prod_{k=3}^{n}k\Big)^2}=\frac{\prod_{k=1}^{n-2}k\times\prod_{k=5}^{n+2}k}{\Big(\prod_{k=3}^{n}k\Big)^2}$$

$$=\frac{(1\times 2)\times((n+1)(n+2))}{((n-1)n)\times(3\times 4)}=\frac{(n+1)(n+2)}{6n(n-1)}$$

∗ Lorsque le plus petit indice est 1 ou 2 à la place de 2 ou 3, ces produits sont nuls car ce nouveau facteur est nul.

• Les coefficients binomiaux sont ceux du triangle de Pascal où chaque terme est la somme de celui qui est au dessus et de son voisin de gauche :

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} \quad \text{si } 1\le k\le n$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{n-k} \quad \text{où } 0\le k\le n$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & \underline{3} & \underline{3} & 1 & \\ 1 & 4 & \underline{6} & 4 & 1 \\ & \dots & & \dots & \end{array}$$

◊ Une récurrence sur n d'hypothèse $\mathcal{P}(n)$ justifie l'expression des coefficients binomiaux du triangle de Pascal à l'aide de factorielles :

$$\mathcal{P}(n)\ :\ \forall\, k\in\{0\cdots n\}\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

■ La formule du binôme fait intervenir les coefficients binomiaux :

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\cdots$$

$$\cdots+\binom{n}{n-2}x^2y^{n-2}+nx\,y^{n-1}+y^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

◊ Une récurrence dont la vérification est immédiate pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$ démontre la formule du binôme :

$$(x+y)^0=1=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^ky^{-k}=1\times x^0\times y^0$$

$$(x+y)^1=x+y=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0$$

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^ky^{2-k}$$

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \qquad \text{par distributivité}\\
&=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^j y^{n+1-j}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \qquad \text{avec } j=k+1\\
&=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}x^j y^{n+1-j}+x^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^j y^{n+1-j}+y^{n+1}\\
&=y^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)x^j y^{n+1-j}+x^{n+1}\\
&=\binom{n+1}{0}x^0y^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^j y^{n+1-j}+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

$*$ Cette preuve reprend la même égalité de façon moins élégante :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n\\
&=(x+y)\Big(\binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\cdots\\
&\qquad\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{n}x^ny^0\Big)\\
&=\qquad\binom{n}{0}x^1y^n+\binom{n}{1}x^2y^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}x^ny^1+x^{n+1}\\
&\quad+y^{n+1}+\binom{n}{1}x^1y^n+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y^2+\binom{n}{n}x^ny^1\\
&=y^{n+1}+\binom{n+1}{1}x^1y^n+\binom{n+1}{2}x^2y^{n-1}+\cdots\\
&\qquad\cdots+\binom{n+1}{n-1}x^{n-1}y^2+\binom{n+1}{n}x^ny^1+x^{n+1}
\end{aligned}$$

$*$ La formule du binôme $(x+y)^n=(y+x)^n$ est symétrique par rapport

aux variables x et y, et les coefficients en k et en $n-k$ sont égaux. Certaines preuves sont plus aisées par une formule que par l'autre :

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \qquad (1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$
$$(x-y)^n=\big(x+(-y)\big)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Séries géométriques

■ Cette différence correspond à un autre produit remarquable :

$$\begin{aligned}
x^{n+1}-y^{n+1}&=(x-y)(x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+x\,y^{n-1}+y^n)\\
&=(x-y)\sum_{k=0}^{n}x^ky^{n-k}\\
x^n-y^n&=(x-y)\sum_{k=0}^{n-1}x^ky^{n-1-k}
\end{aligned}$$

◊ La preuve repose sur un changement d'indices et une mise à part des deux cas particuliers $j=0$ et $j=n+1$ dans ces sommes :

$$\begin{aligned}
(x-y)\sum_{k=0}^{n}x^ky^{n-k}&=\sum_{k=0}^{n}x^{k+1}y^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}x^ky^{n+1-k}\\
&=\sum_{j=1}^{n+1}x^jy^{n+1-j}-\sum_{j=0}^{n}x^jy^{n+1-j} \qquad j=k+1 \text{ dans la première somme}\\
&=x^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}x^jy^{n+1-j}-\sum_{j=1}^{n}x^jy^{n+1-j}-y^{n+1}\\
&=x^{n+1}-y^{n+1}
\end{aligned}$$

$*$ Cette démonstration avec les sommes est plus convaincante qu'une preuve avec des points de suspension « $\cdots$ ».

■ La formule des *séries géométriques* s'en déduit par quotient :

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{pour } x\neq 1\\ n+1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

$*$ Ces égalités indépendantes de la formule du binôme sont des cas particuliers usuels des formules précédentes :

$$x^n - 1 = x^n - 1^n = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$$
$$x^{2n+1} + 1 = x^{2n+1} - (-1)^{2n+1} = (x+1)\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^k$$

Carré et cube de sommes

▷ Le carré d'une somme de n termes comporte n^2 termes.

▷▷ Ce produit est obtenu en appliquant deux fois la distributivité :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^2 &= (x_1+x_2+\cdots+x_n)(x_1+x_2+\cdots+x_n) = \sum_{i=1}^{n}\Big(x_i\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)\\
&= \begin{array}{llll} x_1^2 & +x_1x_2 + x_1x_3 + & \cdots & +x_1x_n \\ +x_2x_1 + & x_2^2 & +x_2x_3 + \cdots & +x_2x_n \\ + & \cdots & \cdots & \cdots \\ +x_nx_1 + x_nx_2 + & \cdots & +x_nx_{n-1} + & x_n^2 \end{array}\\
&= \sum_{1\le i,j\le n} x_ix_j = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j
\end{aligned}$$

La dernière égalité regroupe les termes $x_ix_j + x_jx_i$ dont les indices des deux facteurs sont différents en $2x_ix_j$ où $i<j$.

▷ La méthode est la même pour développer $(x+y+z)^3$.

▷▷ Cette somme comporte $3^3 = 27$ termes :

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^3\\
=\ & xxx + \underline{\underline{xxy}} + xxz + \underline{\underline{xyx}} + xyy + \underline{xyz} + xzx + \underline{xzy} + xzz\\
&+ \underline{\underline{yxx}} + yxy + \underline{yxz} + yyx + yyy + yyz + \underline{yzx} + yzy + yzz\\
&+ zxx + \underline{zxy} + zxz + \underline{zyx} + zyy + zyz + zzx + zzy + zzz\\
=\ & x^3 + y^3 + z^3 + 3\,(\underline{\underline{x^2y}} + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6\,\underline{xyz}
\end{aligned}$$

Les rôles des trois variables x, y et z sont symétriques.
Le coefficient 3 d'un terme comme x^2y correspond au regroupement des trois monômes xxy, xyx et yxx, et le coefficient 6 provient du fait qu'il existe 6 façons d'énumérer les variables x, y et z :

$$xyz \quad xzy \quad yxz \quad yzx \quad zxy \quad zyx$$

▷ Plus généralement l'expression développée de la puissance trois d'une somme de n termes comporte trois sortes de termes :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^3 = \sum_{1\le i,j,k\le n} x_ix_jx_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^3 + 3\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}} x_i^2x_j + 6\sum_{1\le i<j<k\le n} x_ix_jx_k$$

▷▷ La forme développée de ce produit est obtenue en énumérant tous les facteurs possibles et comporte donc n^3 termes.
Le regroupement des termes égaux se fait de la même façon que dans le développement précédent. La première somme correspond au cas où les trois indices sont les mêmes, $i=j=k$; la deuxième somme regroupe les termes $x_i^2x_j$, $x_ix_jx_i$ et $x_jx_i^2$ où deux indices sont égaux pour aboutir à $3\,x_i^2x_j$; de même la dernière somme énumère les produits par groupe de six où les indices i, j et k sont tous différents :

$$x_ix_jx_k \quad x_ix_kx_j \quad x_jx_ix_k \quad x_jx_kx_i \quad x_kx_ix_j \quad x_kx_jx_i$$

Inégalités et règle des signes

Propriétés de base de comparaison des réels

Ce premier paragraphe énonce sans démonstration les propriétés fondamentales de comparation des nombres réels.

■ La relation de comparaison $\le$ sur les nombres réels est une relation d'ordre total :

relation réflexive	$\forall x$	$x \le x$
relation anti-symétrique	$\forall x\ \forall y$	$x\le y$ ET $y \le x \Longrightarrow x = y$
relation transitive	$\forall x\ \forall y\ \forall z$	$x\le y$ ET $y\le z \Longrightarrow x\le z$
ordre total	$\forall x\ \forall y$	$x \le y$ OU $y \le x$

■ La relation $\le$ est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$\forall x\ \forall y\ \forall z \qquad x\le y \Longrightarrow x+z \le y+z$$
$$\forall x\ \forall y \quad 0\le x \text{ ET } 0\le y \Longrightarrow 0 \le xy$$

○ Un réel x est positif si et seulement si $0 \le x$, et négatif dans le cas $x \le 0$.
Les relations de comparaison $<$, $>$ et $\ge$ se déduisent de la relation $\le$:

$$x\le y \Longleftrightarrow y \ge x \qquad x<y \Longleftrightarrow \big(x\le y \text{ ET } x\ne y\big) \Longleftrightarrow y > x$$

∗ Ces équivalences reposent sur la propriété d'ordre total :

$$x < y \iff \mathsf{NON}\,(x \geq y) \qquad x \leq y \iff \mathsf{NON}\,(x > y)$$

Si $x \geq y$ est faux alors $x \neq y$ et $y \geq x$, et ainsi $x < y$.

Addition et inégalités

■ Ce formulaire regroupe les propriétés des sommes d'inégalités :

$$x \leq y \iff y - x \geq 0 \iff -y \leq -x$$
$$x \geq 0 \iff -x \leq 0 \qquad x \leq 0 \iff -x \geq 0$$
$$x \leq y \ \mathsf{ET}\ z \leq t \Longrightarrow x + z \leq y + t$$
$$x < y \ \mathsf{ET}\ z \leq t \Longrightarrow x + z < y + t$$

◊ Des implications circulaires démontrent les premières équivalences, les suivantes correspondent aux cas $x = 0$ ou $y = 0$:

$$\begin{aligned} x \leq y \Longrightarrow\ & x + (-x) = 0 \leq y + (-x) = y - x \\ \Longrightarrow\ & 0 + (-y) = -y \leq y - x + (-y) = -x \\ \Longrightarrow\ & -y + (x+y) = x \leq -x + (x+y) = y \end{aligned}$$

◊ Les dernières propriétés proviennent de la transitivité des inégalités :

$$\left.\begin{aligned} x \leq y \Longrightarrow\ & x + z \leq y + z \\ \mathsf{ET}\ z \leq t \Longrightarrow\ & \phantom{x+z \leq{}} y + z \leq y + t \end{aligned}\right\} \text{donc } x + z \leq y + t$$

Règle des signes

■ La règle des signes peut aussi s'écrire avec des inégalités larges :

$$x > 0 \ \mathsf{ET}\ y > 0 \Longrightarrow xy > 0 \qquad x > 0 \ \mathsf{ET}\ y < 0 \Longrightarrow xy < 0$$
$$x < 0 \ \mathsf{ET}\ y > 0 \Longrightarrow xy < 0 \qquad x < 0 \ \mathsf{ET}\ y < 0 \Longrightarrow xy > 0$$

∗ Un produit de deux facteurs est positif si et seulement si ses deux facteurs sont de même signe, ainsi $1 = 1 \times 1 > 0$.

◊ Les signes des produits ci-dessus proviennent des règles précédentes sur l'opposé d'un nombre, comme dans cet exemple :

$$\begin{aligned} x > 0 \ \mathsf{ET}\ y < 0 &\Longrightarrow x > 0 \ \mathsf{ET}\ -y > 0 \\ &\Longrightarrow x \times (-y) = -(xy) > 0 \\ &\Longrightarrow xy = -(-xy) < 0 \end{aligned}$$

Le cas $x < 0$ et $y > 0$ est similaire en échangeant les rôles de x et y, et le dernier cas se ramène au premier car $xy = (-x)(-y)$.

■ Ce tableau récapitule les principales propriétés des produits d'inégalités :

$$x < y \ \mathsf{ET}\ z > 0 \Longrightarrow xz < yz$$
$$0 \leq x < y \ \mathsf{ET}\ 0 \leq z < t \Longrightarrow xz < yt$$
$$x > 0 \iff 1/x > 0 \qquad x > 1 \iff 0 < 1/x < 1$$
$$0 < x < y \iff 0 < 1/y < 1/x \qquad 0 \leq x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$$

Il existe des propriétés similaires avec des inégalités larges.

◊ Les méthodes de démonstration sont comparables :

$$\begin{aligned} x < y \ \mathsf{ET}\ z > 0 &\Longrightarrow y - x > 0 \ \mathsf{ET}\ z > 0 \\ &\Longrightarrow (y - x)z = yz - xz > 0 \\ &\Longrightarrow xz < yz \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq z\, \mathsf{ET}\, 0 \leq x < y \Longrightarrow\ & xz \leq yz \\ 0 < y\, \mathsf{ET}\ 0 \leq z < t \Longrightarrow\ & \phantom{xz \leq{}} yz < yt \end{aligned}\right\} \text{donc } xz < yt$$

◊ Les propriétés des inverses proviennent de la règle des signes et de produits par $1/x$.

∗ Ces inégalités sur les produits opèrent uniquement sur les nombres positifs, ces implications sont fausses dans le cas général :

$$-3 \leq 2 \ \mathsf{ET}\ -5 \leq 4 \ \mathsf{ET}\ (-3) \times (-5) = 15 > 2 \times 4 = 8$$
$$-\frac{1}{3} < 1 \ \mathsf{ET}\ \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3 < 1 \qquad -4 < 3 \ \mathsf{ET}\ (-4)^2 = 16 > 3^2 = 9$$

∗ La résolution d'une inégalité passe le plus souvent par une factorisation et un tableau de signes.

▷ Résolution de l'équation $x \geq x^2$.

⊳⊳ La factorisation de la différence aboutit à ce tableau de signes :

$$\begin{aligned} x \geq x^2 &\iff x - x^2 \geq 0 \\ &\iff x(1-x) \geq 0 \\ &\iff x \in [0,\, 1] \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$1-x$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les ensembles de nombres

Cette partie cite sans les démontrer les principales propriétés des ensembles de nombres.

Les entiers naturels

• L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

■ Ces propositions caractérisent les entiers naturels :
$\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément ;
$\mathbb{N}$ est discret du fait de cette propriété :

$$\forall\, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad m < n \Longrightarrow m + 1 \leq n$$

$\mathbb{N}$ possède un plus petit élément 0 : $0 \in \mathbb{N}$ ET $(\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq n)$.

Démonstration par récurrence

■ Soit $P(n)$ est une proposition qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$.
Si la condition $P(0)$ est vérifiée et si l'hypothèse $P(n)$ entraîne $P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{c} P(0) \\ \mathsf{ET}\ (\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Longrightarrow P(n+1)) \end{array}\right\} \Longrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n))$$

∗ Une preuve par récurrence consiste donc à appliquer ce théorème ; il est admis dans ce cours, sa démonstration dans le chapitre *entiers naturels et dénombrement* du cours d'algèbre général demande d'approfondir les propriétés de $\mathbb{N}$.

∗ Une démonstration par récurrence peut aussi être effectuée à partir d'un certain rang $m \in \mathbb{N}$ à la place de 0 en vérifiant $P(m)$ et $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq m$.

▷ Démonstration par récurrence de ces deux égalités :

$$\sum_{k=0}^{n} k\, k! = (n+1)! - 1 \qquad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

▷▷ La vérification de la première somme est immédiate pour $n = 0$ et l'associativité de l'addition justifie le passage de l'ordre n à l'ordre $n + 1$.

$$\sum_{k=0}^{0} k\, k! = 0 = 1! - 1$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k\, k! &= \sum_{k=0}^{n} k\, k! + (n+1)\,(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)\,(n+1)! \\ &= (n+2)\,(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1\end{aligned}$$

▷▷ La démonstration de la deuxième égalité est similaire. Pour l'indice $n = 0$ les deux sommes sont vides et de valeur nulle.
Les égalités suivantes démontrent que la différence des deux sommes est nulle à l'ordre $n + 1$ dès que cette différence à l'ordre n est nulle :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \Big(\sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &\qquad - \Big(-\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \Big) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \Big) - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+2} = 0\end{aligned}$$

Les entiers relatifs

• Un entier relatif est un nombre de la forme n ou $-n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$.

■ Tout élément p de $\mathbb{Z}$ possède un opposé $-p \in \mathbb{Z}$.

■ $\mathbb{Z}$ est discret et n'a ni de plus grand élément ni de plus petit élément.

□ Un calcul possible dans $\mathbb{N}$ l'est aussi dans $\mathbb{Z}$ et a le même résultat.

■ Le quotient et le reste entiers de la *division euclidienne* de a par $b \neq 0$ est l'unique couple (q,r) défini ainsi :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \quad \exists!\,(q,r)\in\mathbb{Z}^2 \quad a = bq + r \ \textsf{ET}\ 0 \leq r < |b|$$

∗ Le quantificateur $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

∗ L'existence de la division euclidienne est donc un théorème démontré au début du chapitre d'*arithmétique* ; il est admis dans ce cours.

∗ Ces divisions de ± 51 par ± 5 ont un reste positif dans les quatre cas :

$a =$	b	$\times$	q	$+r$
$51 =$	5	$\times$	10	$+1$
$51 =$	(-5)	$\times$	(-10)	$+1$

$a =$	b	$\times$	q	$+r$
$-51 =$	5	$\times$	(-11)	$+4$
$-51 =$	(-5)	$\times$	11	$+4$

Les nombres rationnels

• Un nombre rationnel est de la forme p/q avec $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$.
Les rationnels p_1/q_1 et p_2/q_2 sont égaux si et seulement si $p_1\,q_2 = p_2\,q_1$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \iff p_1 q_2 = p_2 q_1$$

■ Muni des opérations suivantes tout nombre rationnel possède un opposé et, s'il est non nul, un inverse :

$$\frac{p_1}{q_1}\,\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} \qquad \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} \qquad 0 = \frac{0}{q}$$

$$-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} \qquad \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p} \ \text{ lorsque } p \neq 0 \qquad 1 = \frac{1}{1} = \frac{q}{q}$$

• La notation p/q est dite normalisée ou irréductible lorsque $q > 0$ est le plus petit possible.

■ Tout nombre rationnel possède une et une seule notation normalisée :

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4} \qquad -\frac{12}{16} = \frac{-3}{4} \qquad 3 = \frac{3}{1} \qquad 0 = \frac{0}{1}$$

□ En identifiant $p\in\mathbb{Z}$ et $p/1\in\mathbb{Q}$, un calcul possible dans $\mathbb{Z}$ l'est aussi dans $\mathbb{Q}$ et admet le même résultat.

◊ Le cours d'algèbre justifie ces propriétés issues de celles des entiers.

Les nombres réels

∗ Plusieurs définitions des nombres réels sont équivalentes ; celle décrivant un nombre réel par son *développement décimal* est la plus intuitive.

• Un nombre réel x est défini de façon unique par un nombre entier $u_0\in\mathbb{Z}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de chiffres de $\{0\cdots 9\}$ non tous égaux à 9 à partir d'un certain rang ; l'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$:

$$x = u_0{:}u_1u_2u_3\cdots = u_0 + \frac{u_1}{10} + \frac{u_2}{100} + \frac{u_3}{1000} + \cdots$$

$$\frac{9}{4} = 2{,}25 = 2{:}25000\cdots \qquad -\frac{9}{4} = -2{,}25 = -3 + 0,75 = -3{:}75000\cdots$$

$$\frac{7}{3} = 2{,}33333\cdots = 2{:}33333\cdots \qquad -\frac{7}{3} = -2{,}33333\cdots = -3{:}66666\cdots$$

∗ Cette définition $u_0{:}u_1u_2u_3\cdots$ coïncide avec l'écriture décimale pour les nombres réels positifs.

∗ Ces deux conditions équivalentes énoncent que les chiffres du développement décimal de $x = u_0{:}u_1u_2u_3\cdots$ ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang :

$$\textsf{NON}\ \big(\exists\,N\in\mathbb{N} \ \ \forall\,k \geq N \ \ u_k = 9\big) \iff \big(\forall\,n\in\mathbb{N} \ \ \exists\,k \geq n \ \ u_k \neq 9\big)$$

∗ La négation du quantificateur d'existence $\exists$ est le quantificateur universel $\forall$, et réciproquement :

$$\begin{aligned} & \textsf{NON}\ \big(\exists\,N\in\mathbb{N} \ \ \forall\,k \geq N \ \ u_k = 9\big) \\ \iff & \forall\,N\in\mathbb{N} \ \ \textsf{NON}\ \big(\forall\,k \geq N \ \ u_k = 9\big) \\ \iff & \forall\,N\in\mathbb{N} \ \ \exists\,k \geq N \ \ \textsf{NON}\ \big(u_k = 9\big) \\ \iff & \big(\forall\,n\in\mathbb{N} \ \ \exists\,k \geq n \ \ u_k \neq 9\big) \end{aligned}$$

∘ L'entier $u_0\in\mathbb{Z}$ est appelé partie entière de x et vérifie l'encadrement $u_0 \leq x < u_0 + 1$.

□ Les nombres réels de forme $p{:}000\cdots$ peuvent être identifiés à $p\in\mathbb{Z}$. Un calcul possible dans $\mathbb{Q}$ l'est aussi dans $\mathbb{R}$ et a le même résultat.

∗ Les opérations de base sur les réels peuvent être définis comme des extensions des opérations usuelles sur les nombres décimaux.

$*$ Si $x = 0{:}999\cdots$ était un nombre réel alors $x = 1{:}000\cdots$.
Le calcul suivant en est une justification numérique :
$x = 0{:}999\cdots \qquad 10x = 9{:}999\cdots \qquad 9x = 10x - x = 9{:}000\cdots = 9$

$$x = \frac{9x}{9} = \frac{9}{9} = 1 = 1{:}000\cdots$$

Notation des ensembles de nombres

Dans ce paragraphe a, b et les éléments des ensembles E et F sont des nombres.

• Ces notations résument les opérations usuelles sur les ensembles de nombres :

$$E_+ = \{x \in E \ / \ x \geq 0\} \qquad E_- = \{x \in E \ / \ x \leq 0\}$$
$$E^* = \{x \in E \ / \ x \neq 0\} \qquad -E = \{-x \ / \ x \in E\} = \{x \ / \ -x \in E\}$$
$$E \cdot F = \{xy \ / \ (x,y) \in E \times F\} \qquad a\,E = \{ax \ / \ x \in E\} = \{a\} \cdot E$$
$$E + F = \{x + y \ / \ (x,y) \in E \times F\}$$
$$a + E = \{a + x \ / \ x \in E\} = \{a\} + E$$

◦ Les intervalles de nombres réels sont définis ainsi :

$$[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\} \qquad [a,\ b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$$
$$]a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\} \qquad]a,\ b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$
$$]-\infty,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq b\} \qquad]-\infty,\ b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}$$
$$[a,\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x\} \qquad]a,\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\}$$

Les intervalles $]a,\ b[$, $]a,\ +\infty[$ et $]-\infty,\ b[$ sont des intervalles ouverts.
Les intervalles $[a,\ b]$, $[a,\ +\infty[$ et $]-\infty,\ b]$ sont des intervalles fermés.
Un intervalle fermé borné $[a,\ b]$ est appelé segment.

$*$ L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R} =]-\infty,\ +\infty[$ sont des intervalles qui sont par convention et ouverts et fermés.
Même si $[a,\ b] = \emptyset$ dès que $a > b$ et $[a,\ a] = \{a\}$, la notation $[a,\ b]$ des intervalles sous-entend généralement $a < b$.

$*$ L'ensemble des entiers pairs est $2\mathbb{Z}$, et celui des entiers impairs $2\mathbb{Z}+1$.
Ces exemples illustrent quelques opérations sur les ensembles :

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \qquad \mathbb{Z}_- = -\mathbb{N} \qquad 2\,\mathbb{R} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} + [0,\ 1[= \mathbb{R}$$
$$[1,\ 2] + [3,\ 4] = [4,\ 6] \qquad]1,\ 2[+]3,\ 4[= [1,\ 2[+]3,\ 4] =]4,\ 6[$$

Ces opérations sur les ensembles ne respectent pas les règles du calcul algébrique :

$$\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N} \neq 2\mathbb{N} \qquad \mathbb{N} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}$$

Plus petit élément et plus grand élément

• Le nombre m est un minorant d'un ensemble A de réels et le nombre M est un majorant de A à ces conditions :

$$\forall\, a \in A \quad m \leq a \qquad \forall\, a \in A \quad a \leq M$$

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ majoré et minoré est dit borné.

• Le plus petit élément $\min A$ et le plus grand élément $\max A$ d'un ensemble A de réels, s'ils existent, sont définis ainsi de façon unique :

$$\min A \in A \ \textsf{ET} \ (\forall\, a \in A \quad \min A \leq a)$$
$$\max A \in A \ \textsf{ET} \ (\forall\, a \in A \quad a \leq \max A)$$
$$\min\{1, 2, 3, 4\} = 1 \qquad \min([0,\ 1]) = 0 \qquad \min(]0,\ 1]) \text{ n'existe pas}$$

$*$ S'ils existent, $\min A$ et $\max A$ sont un minorant et un majorant de l'ensemble A.

◊ Si m_1 et m_2 sont deux plus petits éléments de A, le plus petit élément m_1 vérifie $m_1 \leq m_2$ en appliquant la définition avec $x = m_2 \in A$; de même $m_2 \leq m_1$. Ceci termine la preuve de l'unicité $m_1 = m_2$ du plus petit élément.
La preuve de l'unicité du plus grand élément est similaire.

■ Tout ensemble fini et non vide A de nombres réels est borné et possède un plus grand élément $\max A$ et un plus petit élément $\min A$.

◊ Ce résultat se montre par récurrence sur le nombre d'éléments de A.

$*$ Cette notation pour deux réels se généralise à une famille finie :

$$\max(a,b) = \max\{a,b\} \qquad \min(a,b) = \min\{a,b\}$$
$$\min(a,b) \leq a \leq \max(a,b) \qquad \min(a,b) \leq b \leq \max(a,b)$$

$*$ Lorsque $a \leq b$ le segment $[a,\ b]$ a un plus petit élément et un plus grand élément :

$$\min[a,\ b] = a = \min[a,\ +\infty[\qquad \max[a,\ b] = b = \max]-\infty,\ b]$$

▹ L'intervalle $]-\infty,\ 1[$ n'a ni plus grand ni plus petit élément.

⊳ Par l'absurde si $]-\infty, 1[$ a un plus petit élément $a \in \mathbb{R}$ alors $a - 1 < a < 1$ n'est pas dans $]-\infty, 1[$ car a est le plus petit élément de $]-\infty, 1[$, ceci est absurde.
Donc le plus petit élément a de $]-\infty, 1[$ n'existe pas, et $]-\infty, 1[$ n'a pas de plus petit élément.

⊳ Par l'absurde si $]-\infty, 1[$ a un plus grand élément $b \in]-\infty, 1[$ alors $b < 1$ et ces inégalités aboutissent à une contradiction ; le réel $(b+1)/2$ est dans l'intervalle $]-\infty, 1[$ strictement plus grand que b qui n'est donc pas le plus grand élément :

$$\begin{aligned} b < 1 &\Longrightarrow 2b < b+1 < 2 \\ &\Longrightarrow b < \frac{b+1}{2} < 2 \end{aligned}$$

Donc le plus petit élément b de $]-\infty, 1[$ n'existe pas, et $]-\infty, 1[$ n'a pas de plus petit élément.

À propos des fonctions

• Une application $f : E \to F$ d'un ensemble E dans un ensemble F associe à tout élément $x \in E$ une et une seule image $f(x) \in F$:

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in F \quad y = f(x)$$

• Une fonction réelle est une application d'un sous-ensemble non vide $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans cette partie $\lambda \in \mathbb{R}$, et f et g sont des fonctions réelles.

• La somme, les produits et la composition sont définis ainsi :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \qquad fg = f \times g : x \mapsto f(x)\, g(x)$$
$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)) \qquad \lambda f : x \mapsto \lambda\, f(x)$$

Vocabulaire des fonctions

• Une fonction f est peut être caractérisée par ces propositions :

paire	$\forall x \in \mathcal{D}$	$-x \in \mathcal{D}$ ET $f(-x) = f(x)$
impaire	$\forall x \in \mathcal{D}$	$-x \in \mathcal{D}$ ET $f(-x) = -f(x)$
croissante	$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2$	$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$
décroissante	$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2$	$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$
strictement croissante	$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2$	$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
strictement décroissante	$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2$	$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$
majorée	$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}$	$f(x) \leq M$
minorée	$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}$	$m \leq f(x)$
bornée	f est majorée et minorée, *i.e.* $\lvert f \rvert$ est majorée	
c'est-à-dire	$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}$	$\lvert f(x) \rvert \leq M$
constante	$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2$	$f(x) = f(y)$
c'est-à-dire	$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}$	$f(x) = c$

Une fonction qui est croissante ou décroissante est dite monotone.

∗ L'application $\mathrm{Id}_\mathbb{R}$ n'est pas majorée ; elle vérifie la négation de la définition des applications majorées :

$$\begin{aligned} &\mathsf{NON}\ (\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Id}_\mathbb{R}(x) = x \leq M) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall M \in \mathbb{R} \quad \mathsf{NON}\ (\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Id}_\mathbb{R}(x) = x \leq M) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \mathsf{NON}\ (\mathrm{Id}_\mathbb{R}(x) = x \leq M) \\ \Longleftrightarrow\ &\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Id}_\mathbb{R}(x) = x > M \\ &\text{est vrai avec } x = M + 1 > M \text{ par exemple} \end{aligned}$$

∗ Le sens d'une expression logique dépend de l'ordre de ses quantificateurs. L'application $\mathrm{Id}_\mathbb{R}$ n'est pas majorée mais vérifie cette autre propriété obtenue par échange de l'ordre des quantificateurs :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Id}_\mathbb{R}(x) = x \leq M \quad \text{est faux}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Id}_\mathbb{R}(x) = x \leq M \quad \text{est vrai}$$

Dans ce dernier cas il suffit de prendre $M = x$.

• Une application f est dite périodique à cette condition :

$$\exists T \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad x + T \in \mathcal{D} \ \mathsf{ET}\ f(x+T) = f(x)$$

Dans ce cas T est appelée une période de f, et la valeur choisie est généralement la plus petite valeur $T > 0$ possible.

∗ L'application nulle $x \mapsto 0$ est périodique et tout $T > 0$ est une période.

• Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application $f : n \mapsto f(n) = u_n$ de $\mathbb{N}$.

Propriétés des produits par une constante

□ Ces propriétés découlent directement des définitions précédentes :

$$f \text{ est majorée [minorée]} \Longleftrightarrow -f \text{ est minorée [majorée]}$$

$$f \text{ est croissante [décroissante, strictement]} \Longleftrightarrow -f \text{ est décroissante [croissante, strictement]}$$

$$f \text{ est paire [impaire, bornée]} \Longrightarrow \lambda f \text{ paire [impaire, bornée]}$$

$$\lambda \geq 0 \text{ ET } f \text{ est majorée [minorée]} \Longrightarrow \lambda f \text{ est majorée [minorée]}$$

$$\lambda \geq 0 \text{ ET } f \text{ est croissante [décroissante]} \Longrightarrow \lambda f \text{ est croissante [décroissante]}$$

$$\lambda > 0 \text{ ET } f \text{ est strictement croissante [décroissante]} \Longrightarrow \lambda f \text{ est strictement croissante [décroissante]}$$

□ Si la fonction f est périodique de période $T > 0$ alors toutes les fonctions λf sont périodiques de période T.

∗ L'application carrée est minorée par 0 mais l'application opposée, obtenue par produit par -1 n'est pas minorée et est majorée par 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \geq -x^2$$

Propriétés des sommes d'applications

□ Ces propriétés se déduisent directement des définitions précédentes :

$$f \text{ et } g \text{ sont paires [impaires]} \Longrightarrow f+g \text{ est paire [impaire]}$$

$$f \text{ et } g \text{ sont majorées [minorées, bornées]} \Longrightarrow f+g \text{ est majorée [minorée, bornée]}$$

$$f \text{ et } g \text{ sont croissantes [décroissantes]} \Longrightarrow f+g \text{ est croissante [décroissante]}$$

Si dans ce dernier cas l'une des deux fonctions f ou g est strictement monotone alors la somme $f+g$ est strictement monotone.

□ Si les fonctions f et g sont périodiques de même période $T > 0$ alors la fonction somme $f+g$ est périodique et T est une période de $f+g$.

∗ La plus petite période de $f+g$ n'est pas nécessairement une période de f et de g :

$$\begin{array}{lll} f(x) = \cos^2 x + \cos x & g(x) = \cos^2 x - \cos x & \text{sont de période } 2\pi \\ f(x+2\pi) = f(x) & g(x+2\pi) = g(x) & \\ f(0) = 2 \neq f(\pi) = 0 & g(0) = 2 \neq g(\pi) = 0 & \text{et } \pi \text{ n'est pas période} \\ (f+g)(x) = 2\cos^2 x = (f+g)(x+\pi) & & \text{est de période } \pi. \end{array}$$

Propriétés des produits d'applications

□ Les propriétés des produits de fonctions sont similaires :

$$f \text{ et } g \text{ sont paires [impaires]} \Longrightarrow fg \text{ est paire [paire]}$$

$$f \text{ est paire et } g \text{ est impaire} \Longrightarrow fg \text{ est impaire}$$

$$f \text{ et } g \text{ sont à valeurs positives et majorées} \Longrightarrow fg \text{ est majorée}$$

$$f \text{ et } g \text{ sont bornées} \Longrightarrow fg \text{ est bornée}$$

$$f \text{ et } g \text{ sont à valeurs positives et croissantes [décroissantes]} \Longrightarrow fg \text{ est croissante [décroissante]}$$

□ Si les fonctions f et g sont périodiques de même période $T > 0$ alors la fonction produit fg est périodique et T est une période de fg.

∗ Le produit d'applications croissantes n'est pas nécessairement une application croissante ; ainsi l'application identité est croissante et l'application carrée n'est par croissante :

$$\begin{array}{rl} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \longmapsto x & \quad x \leq y \Longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x \leq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(y) = y \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \longmapsto x^2 & \quad -3 \leq 2 \text{ ET } (-3)^2 = 9 > 2^2 = 4 \end{array}$$

Propriétés des applications composées

Ce paragraphe ne suppose pas nécessairement que les ensembles de définition de f et g soient identiques, mais impose que les applications composées soient bien définies.

□ Les applications composées vérifient les propriétés suivantes :

$$f \text{ est paire} \Longrightarrow g \circ f \text{ est paire}$$

$$f \text{ est impaire et } g \text{ est paire} \Longrightarrow g \circ f \text{ est paire}$$

$$f \text{ et } g \text{ sont impaires} \Longrightarrow g \circ f \text{ est impaire}$$

$$g \text{ est majorée} \Longrightarrow g \circ f \text{ est majorée}$$

de même pour minorée ou bornée

$$f \text{ et } g \text{ sont croissantes} \Longrightarrow g \circ f \text{ est croissante}$$
$$f \text{ et } g \text{ sont décroissantes} \Longrightarrow g \circ f \text{ est croissante}$$
$$f \text{ est décroissante et } g \text{ est croissante} \Longrightarrow g \circ f \text{ est décroissante}$$
$$f \text{ est croissante et } g \text{ est décroissante} \Longrightarrow g \circ f \text{ est décroissante}$$
$$f \text{ est périodique} \Longrightarrow g \circ f \text{ est périodique}$$

Présentation des antécédents et des bijections

• Un antécédent $x \in E$ d'un élément $y \in F$ pour l'application $f : E \to F$ est caractérisé par $f(x) = y$.

$*$ Le réel 4 a deux antécédents -2 et 2 par l'application $f : x \mapsto x^2$, le nombre 0 possède 0 comme seul antécédent, et -1 n'a pas d'antécédent.

• Une application $f : E \to F$ est injective si tout élément de F a au maximum un antécédent :

$$\forall (u,v) \in E^2 \quad f(u) = f(v) \Longrightarrow u = v$$

La seule possibilité pour que deux images par une application injective soient les mêmes est l'égalité des antécédents.

★ Ces deux implications sont équivalentes et appelées contraposée l'une de l'autre. Elles sont obtenues par négation des conditions et échange de la cause et de la conséquence :

$$\big(f(u) = f(v) \Longrightarrow u = v\big) \qquad \big(u \neq v \Longrightarrow f(u) \neq f(v)\big)$$

$*$ Une application n'est pas injective lorsqu'un élément a au moins deux antécédents :

$$\exists (u,v) \in E^2 \quad u \neq v \ \textsf{ET} \ f(u) = f(v)$$

• Une application $f : E \to F$ est surjective si tout élément de F admet un, ou plusieurs, antécédents :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

$*$ Une application n'est pas surjective lorsqu'un élément n'a pas d'antécédent :

$$\exists y \in F \quad \forall x \in E \quad f(x) \neq y$$

• Une application $f : E \to F$ est bijective lorsque tout élément de F possède exactement un antécédent :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$$

Ceci signifie que l'application f est injective et surjective.

• L'application réciproque d'une application bijective f est l'application notée $f^{-1} : F \to E$ qui à un élément $y \in F$ associe son unique antécédent $x \in E$ par f : $f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$*$ Une application constante $x \mapsto c$ sur $\mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective. L'application identité $\mathrm{Id}_E : x \mapsto x$ sur E est bijective d'application réciproque $\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E$ elle-même.

■ L'application réciproque d'une application bijective vérifie ces propositions :

$$\forall x \in E \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \forall y \in F \quad (f \circ f^{-1})(y) = y$$
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

◊ Le premier chapitre *logique et théorie des ensembles* du cours d'algèbre générale justifie l'existence, l'unicité et les propriétés de l'application réciproque d'une application bijective.

★ Pour que l'application réciproque f^{-1} soit définie, il est nécessaire que l'application f soit bijective.

▷ L'application affine $f : x \mapsto 2x + 3$ est bijective sur $\mathbb{R}$.

▷▷ La résolution de l'équation affine $y = 2x + 3$ prouve que tout réel $y \in \mathbb{R}$ a pour unique antécédent $x = (y - 3)/2$, l'application f est bijective, et cet antécédent caractérise l'application réciproque :

$$y = 2x + 3 \Longleftrightarrow y - 3 = 2x \Longleftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x + 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-3}{2} \end{aligned}$$

★ Le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f par symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$ de façon à échanger les rôles de x et de y.

⊠ Une fonction f croissante au sens large vérifie cette implication :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2 \quad f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y$$

◊ Cette implication est la contraposée de la définition :

$$\begin{array}{lrl} \forall\,(x,y)\in\mathcal{D}^2 & & x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \\ & \text{c'est-à-dire} & \mathsf{NON}\,(f(x) \geq f(y)) \Longrightarrow \mathsf{NON}\,(x \geq y) \\ & \text{c'est-à-dire} & f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y \end{array}$$

∗ Une fonction f strictement croissante vérifie donc cette équivalence :

$$\forall\,(x,y)\in\mathcal{D}^2 \quad f(x) < f(y) \Longleftrightarrow x < y$$

L'implication réciproque est la définition d'une application strictement croissante.

□ L'application réciproque d'une application bijective et strictement croissante est strictement croissante.
De façon analogue l'application réciproque d'une application bijective et strictement décroissante est décroissante.

◊ Cette propriété est une application de la précédente :

$$x = f(f^{-1}(x)) < y = f(f^{-1}(y)) \Longleftrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$$

La méthode est similaire pour les applications décroissantes.

Restriction et prolongements

• Si l'application f est définie d'un ensemble de départ E dans un ensemble G, et si F est un sous-ensemble de E alors la restriction de f à F est l'application $f_{/F}$ définie sur F qui prend les mêmes valeurs que f :

$$F \subset E \qquad \begin{array}{rl} f : E & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} f_{/F} : F & \longrightarrow G \\ x & \longmapsto f_{/F}(x) = f(x) \end{array}$$

• Lorsque l'ensemble E est contenu dans l'ensemble H, l'application g dont l'ensemble de départ est H est un prolongement de $f : E \to G$ si et seulement si f est la restriction de g à E :

$$f : E \to G \qquad E \subset H \qquad g : H \to G$$

$$\begin{array}{rl} g \text{ est un prolongement de } f & \Longleftrightarrow g_{/E} = f \\ & \Longleftrightarrow (\forall\,x\in E \quad f(x) = g(x)) \end{array}$$

∗ Plusieurs applications peuvent être un prolongement d'une même fonction, mais une restriction est nécessairement unique.

∗ L'application $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas monotone, car elle n'est ni croissante ni décroissante ; mais les restrictions $f_{/\mathbb{R}_-}$ et $f_{/\mathbb{R}_+}$ sont monotones car la première est décroissante et la seconde croissante.

Image directe et image réciproque

Dans ce paragraphe f est une application de E dans F, $A \subset E$, $B \subset F$, $x\in E$ et $y\in F$.

• L'image directe de A par f est l'ensemble des images des éléments de A. L'image réciproque de B par f est l'ensemble des antécédents des éléments de B :

$$f(A) = \{f(a)\ /\ a\in A\} \subset F \qquad y\in f(A) \Longleftrightarrow (\exists\, a\in A \quad f(a) = y)$$

$$f^{-1}(B) = \{x\in E\ /\ f(x)\in B\} \subset E \qquad x\in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x)\in B$$

∗ Ces exemples illustrent les définitions précédentes :

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto t^2 \end{array} \qquad f([-1,\,2]) = [0,\,4] \qquad f^{-1}([-1,\,9]) = [-3,\,3]$$

★ L'ensemble des antécédents des éléments de B est noté $f^{-1}(B) \subset E$ et ne doit pas être confondu avec l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ uniquement définie si l'application f est bijective.

∗ Pour un élément $b\in F$ l'image réciproque de l'ensemble à un élément $\{b\}$ peut être vide, ou comporter un ou plusieurs éléments :

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{array} \qquad f^{-1}(\{1\}) = \{-1, +1\}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \qquad f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$$

Dans ce cas les expressions $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(-1)$ ne sont pas définie car l'application f n'est pas bijective.

∗ Uniquement dans le cas particulier ou l'application f est bijective, l'ensemble constitué de l'unique antécédent de b par l'application f coïncide avec le sous-ensemble de l'image réciproque de l'ensemble $\{b\}$:

$$f : E \to F \quad \text{est bijective} \qquad b\in F \qquad \left\{f^{-1}(b)\right\} = f^{-1}(\{b\})$$

Trois fonctions réelles

Dans cette partie a, b, h, x et y sont des réels, $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$ et $p\in\mathbb{Z}^2$.

Valeur absolue

• L'application valeur absolue $|\bullet|$ peut être définie ainsi :

$$0 \le |x| = \max(x,-x) = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Les inégalités entre les réels positifs et négatifs justifient la cohérence de cette définition double.

▪ Les propriétés élémentaires des valeurs absolues sont les suivantes :

$$-|x| \le x \le |x| \qquad |xy| = |x|\,|y| \qquad |x| = |y| \iff x = y \text{ OU } x = -y$$

$$|x| \le y \iff -y \le x \le y \qquad x\in[a-h,\, a+h] \iff |x-a| \le h$$

◊ Les preuves de ces propositions distinguent en fonction du signe de l'argument de la valeur absolue, par exemple selon les deux cas $x \le 0$ et $x \ge 0$. Les deux dernières équivalences diffèrent uniquement par leur notations, $x-a$ à la place de x, et h à la place de y.

Inégalités triangulaires

▪ Les inégalités triangulaires sont à la base de nombreuses majorations et minorations :

$$|x+y| \le |x| + |y| \qquad \text{est la principale inégalité triangulaire}$$

$$\big||x|-|y|\big| \le |x+y| \le |x|+|y| \qquad \big||x|-|y|\big| \le |x-y| \le |x|+|y|$$

◊ La principale inégalité triangulaire se démontre par une somme d'encadrement :

$$\begin{cases} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \end{cases} \qquad \text{par somme } -(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y| \quad \text{et donc } |x+y| \le |x|+|y|$$

◊ Les autres inégalités triangulaires se déduisent de la précédente :

$$\begin{cases} |x| = |(x-y)+y| \le |x-y|+|y| \Longrightarrow |x|-|y| \le |x-y| \\ |y| = |(y-x)+x| \le |x-y|+|x| \Longrightarrow |y|-|x| \le |x-y| \end{cases}$$

$$\text{donc } \big||x|-|y|\big| \le |x-y|$$

$$\big||x|-|y|\big| = \big||x|-|-y|\big| \le |x-(-y)| = |x+y|$$

$*$ La fonction réelle signe sgn, et la partie positive x_+ et la partie négative x_- de x sont liées à la valeur absolue :

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad |x| = x \operatorname{sgn} x \qquad x = |x| \operatorname{sgn} x$$

$$x_+ = \max(x,0) = \frac{|x|+x}{2} \ge 0 \qquad x_- = \max(-x,0) = \frac{|x|-x}{2} \ge 0$$

$$|x| = x_+ + x_- \qquad x = x_+ - x_-$$

Partie entière

• La partie entière $\mathrm{E}(x)$ de x est le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à x et est caractérisée par l'une ou l'autre de ces définitions :

$$\mathrm{E}(x)\in\mathbb{Z} \text{ ET } \mathrm{E}(x) \le x < \mathrm{E}(x)+1 \qquad \mathrm{E}(x) = \max\{p\in\mathbb{Z} \ / \ p \le x\}$$

Ainsi $\mathrm{E}(\pi) = 3$ et $\mathrm{E}(-\pi) = -4$.
Le nombre $x - \mathrm{E}(x)\in[0,\, 1[$ est appelé partie fractionnaire de x.

★ Ces encadrements sont équivalents par somme $\bullet\pm1$ sur deux termes :

$$\mathrm{E}(x) \le x < \mathrm{E}(x)+1 \iff x-1 < \mathrm{E}(x) \le x$$

▪ La partie entière est croissante et vérifie ces propriétés :

$$\mathrm{E}(x) = x \iff x\in\mathbb{Z} \qquad \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(y) \Longrightarrow |x-y| < 1$$

$$\mathrm{E}(x+p) = \mathrm{E}(x)+p \quad \text{où } p\in\mathbb{Z} \qquad x \le y \Longrightarrow \mathrm{E}(x) \le \mathrm{E}(y)$$

◊ La propriété $\mathrm{E}(x)\in\mathbb{Z}$ démontre l'implication $\mathrm{E}(x) = x \Longrightarrow x\in\mathbb{Z}$. Réciproquement si $x \in \mathbb{Z}$ alors la définition $\mathrm{E}(x) \le x < \mathrm{E}(x)+1$ associé au fait que $\mathbb{Z}$ est discret entraine $x < \mathrm{E}(x)+1$ et $x \le \mathrm{E}(x)$. En conclusion ces deux inégalités larges prouvent $x = \mathrm{E}(x)$ dès que $x\in\mathbb{Z}$.

◊ Des manipulations d'inégalités démontrent l'implication suivante :

$$\left.\begin{matrix} x-1 < \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(y) \le x \\ y \ge \quad \mathrm{E}(y) \quad > y-1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x-y-1 < 0 < x-y+1$$

$$\Longrightarrow x-y < 1 \text{ ET } -1 < x-y$$

$$\Longrightarrow |x-y| < 1$$

◊ L'application E est croissante pour cette raison :

$$x \le y \Longrightarrow \mathrm{E}(x) \le x \le y < \mathrm{E}(y)+1$$

$$\Longrightarrow \mathrm{E}(x) \le \mathrm{E}(y) \qquad \text{car } \mathbb{Z} \text{ est discret}$$

◊ La démonstration de l'égalité $\mathrm{E}(x+p) = \mathrm{E}(x) + p \in \mathbb{Z}$ vérifie les propriétés caractéristiques de la partie entière :

$$\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x)+1 \quad \text{donc} \quad \mathrm{E}(x)+p \leq x+p < \mathrm{E}(x)+p+1 \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(x)+p \in \mathbb{Z}$$

▷ Démonstration de l'encadrement suivant où $u \in \mathbb{R}$:

$$10\ \mathrm{E}(u) \leq \mathrm{E}(10u) \leq 10u < \mathrm{E}(10u)+1 \leq 10\,(\mathrm{E}(u)+1)$$

⊳⊳ Les parties entières de u et de $10u$ énoncent ces encadrements :

$$\mathrm{E}(u) \leq u < \mathrm{E}(u)+1 \qquad 10\ \mathrm{E}(u) \leq 10u < 10(\mathrm{E}(u)+1)$$
$$\mathrm{E}(10u) \leq 10u < \mathrm{E}(10u)+1$$

La combinaison des encadrements associés à $10u$ aboutit à ces inégalités :

$$10\ \mathrm{E}(u) \leq 10u < \mathrm{E}(10u)+1 \qquad \mathrm{E}(10u) \leq 10u < 10(\mathrm{E}(u)+1)$$

Comme $\mathbb{Z}$ est discret, ces inégalités strictes sur des entiers correspondent à deux des inégalités larges recherchées :

$$10\ \mathrm{E}(u) \leq \mathrm{E}(10u) \qquad \mathrm{E}(10u)+1 \leq 10(\mathrm{E}(u)+1)$$

Par ailleurs l'encadrement central est la définition de $\mathrm{E}(10u)$.

∗ Un certain nombre de démonstrations faisant intervenir $\mathrm{E}(x)$ reprend les méthodes des démonstrations précédentes ou repose sur l'égalité $x = p + h$ où $p = \mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z}$ et $h = x - \mathrm{E}(x) \in [0,\, 1[$.

Approximation décimale

• Les approximations décimales par défaut a_n et par excès b_n de $x \in \mathbb{R}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ sont définies ainsi :

$$a_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \leq x = \frac{10^n x}{10^n} < b_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)+1}{10^n}$$

∗ Les développements décimaux par défaut et par excès à 10^{-1} et 10^{-2} près de π sont donc ceux-ci :

$$\frac{\mathrm{E}(10\pi)}{10} = 3{,}1 \leq \pi < 3{,}2 \qquad 3{,}14 \leq \pi < 3{,}15$$

◊ L'encadrement précédent provient de la définition même de la partie entière, après quotient par 10^n.

▷ La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

⊳⊳ Les inégalités $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$ proviennent des inégalités de l'exercice précédent appliquée avec $u = 10^n x$, divisées ensuite par 10^{n+1} :

$$10\ \mathrm{E}(10^n x) \leq \mathrm{E}(10^{n+1}x) \leq 10^{n+1}x < \mathrm{E}(10^{n+1}x)+1 \leq 10(\mathrm{E}(10^n x)+1)$$

$$\underbrace{\frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n}}_{=a_n} \leq \underbrace{\frac{\mathrm{E}(10^{n+1}x)}{10^{n+1}}}_{=a_{n+1}} \leq x < \underbrace{\frac{\mathrm{E}(10^{n+1}x)+1}{10^{n+1}}}_{=b_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{\mathrm{E}(10^n x)+1}{10^{n+1}}}_{=b_n}$$

∗ Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et la suite de termes $b_n - a_n = 1/10^n$ est de limite nulle.
Le théorème d'analyse sur les suites adjacentes justifie que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x.

Radicaux

• Les racines carrées et racines cubiques peuvent être définies ainsi :

racine carrée notée $y = \sqrt{x} = x^{1/2} : \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \exists!\, y \in \mathbb{R}_+ \quad y^2 = x$

racine cubique $\quad y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, y \in \mathbb{R} \quad y^3 = x$

◊ Ce chapitre admet que l'application $x \mapsto x^2$ strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ est bijective. L'application racine $\sqrt{\bullet}$ sur $\mathbb{R}_+$ est l'application réciproque.

■ Certaines égalités sont uniquement valables pour les nombres positifs, et d'autres exactes pour tous les réels :

lorsque $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$: $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\,\sqrt{y} \qquad (\sqrt{x}\,)^2 = \sqrt{x^2} = x$

$x < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{y} \iff x^2 < y^2$

lorsque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\sqrt{x^2} = |x| \qquad x^2 = y^2 \iff |x| = |y|$

$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} \qquad (\sqrt[3]{x}\,)^3 = \sqrt[3]{x^3} = x$

$x < y \iff \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \iff x^3 < y^3$

Les applications $\sqrt{\bullet}$ et $\sqrt[3]{\bullet}$ sont donc strictement croissantes.

◊ La démonstration de $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ consiste à vérifier l'égalité $(\sqrt{x}\sqrt{y}\,)^2 = xy$ et $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$.
Cette propriété appliquée à $y = x \geq 0$ démontre $\sqrt{x^2} = x = (\sqrt{x}\,)^2$.

◊ Les produits d'inégalités de nombres positifs prouvent une première implication :

$$0 \leq x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$$

Une preuve de l'implication réciproque pour les nombres positifs repose sur une identité remarquable :

$$\begin{aligned} x^2 < y^2 &\Longrightarrow y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) > 0 \\ &\Longrightarrow y - x > 0 \qquad \text{car } 0 \leq x \text{ et } 0 < y, \text{ donc } y + x > 0 \\ &\Longrightarrow x < y \end{aligned}$$

En conclusion les réels positifs vérifient $x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$.

◊ L'équivalence précédente appliquée à $\sqrt{x} \geq 0$ et à $\sqrt{y} \geq 0$ termine la démonstration :

$$x = (\sqrt{x}\,)^2 < y = (\sqrt{y}\,)^2 \Longleftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

∗ Ces méthodes s'adaptent aux racines cubiques.

∘ La racine n-ème $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ de x est définie par $y^n = x$; elle opère comme la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ si $n \in 2\mathbb{N}^*$ est pair, et sur $\mathbb{R}$ si $n \in 2\mathbb{N}^* + 1$ est impair.

□ Les racines vérifient ces propriétés où $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{1} = 1 \qquad \sqrt[n]{0} = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x}} \quad \text{pour } x \neq 0$$

$$x < y \Longleftrightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow x^n < y^n$$

$$(\sqrt[n]{x}\,)^n = \sqrt[n]{x^n} = x \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

L'application $\sqrt[n]{\bullet}$ est donc strictement croissante :

▷ Les racines carrées vérifient ces inégalités :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} &\leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad && \text{pour } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \sqrt{y} - \sqrt{x} &\leq \sqrt{y-x} && \text{dès que } 0 \leq x \leq y \end{aligned}$$

⊳⊳ La démonstration de la première inégalité exploite principalement le fait que l'application racine $\sqrt{\bullet}$ est croissante et positive :

$$\begin{aligned} x + y = \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 &\leq \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + 2\sqrt{x}\,\sqrt{y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y}\,)^2 \\ \sqrt{x+y} &\leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad \text{car } \sqrt{\bullet} \text{ est croissante} \end{aligned}$$

⊳⊳ La seconde inégalité découle de la première par différence à partir

de la somme de nombres positifs $y = x + (y - x)$:

$$\sqrt{y} = \sqrt{x + (y-x)} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y-x} \qquad \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$$

Nombres rationnels et nombres irrationnels

■ Il existe des nombres réels, appelés nombres irrationnels, qui ne sont pas des nombres rationnels : par exemple $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont des nombres irrationnels.

◊ La preuve que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est une démonstration par l'absurde.
Si la forme irréductible de $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est $\sqrt{2} = p/q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $q > 0$ le plus petit possible, alors les implications suivantes montrent successivement que p est pair, puis que q est pair, et donc que la fraction p/q n'est pas irréductible, ce qui contredit l'hypothèse sur $\sqrt{2} = p/q$ est irréductible :

$$(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1 \quad \text{si } m \in \mathbb{Z}$$

$$n \in 2\mathbb{Z} + 1 \Longrightarrow n^2 \in 2\mathbb{Z} + 1 \quad \text{a pour contraposée } n^2 \in 2\mathbb{Z} \Longrightarrow n \in 2\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}\,)^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} &\Longrightarrow 2q^2 = p^2 \qquad && \text{et } p \text{ est pair, de la forme } p = 2\tilde{p} \\ &\Longrightarrow 2q^2 = 4\tilde{p}^2 && \text{avec } \tilde{p} \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow q^2 = 2\tilde{p}^2 && \text{et } q \text{ est pair, de la forme } q = 2\tilde{q} \\ &\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2\tilde{p}}{2\tilde{q}} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} && \text{et } 0 < \tilde{q} < q \text{ et } \tilde{q} \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ces déductions aboutissant à une contradiction prouvent que l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

▷ Les démonstrations de l'irrationnalité de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont similaires.

⊳⊳ Si $m = 3n + r$ où r est le reste de la division euclidienne de $m \in \mathbb{Z}$ par 3, une énumération des 3 cas possibles $r = 0$, $r = 1$ et $r = 2$ dans le développement de m^2 montre que la divisibilité de m^2 par 3 entraîne celle de m par 3.

$$\begin{array}{r|l} n = 3m + 0 & n^2 = 3(3m^2) \\ n = 3m + 1 & n^2 = 3(3m^2 + 2m) + 1 \\ n = 3m + 2 & n^2 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1 \end{array}$$

Ensuite l'écriture de $\sqrt{3} = p/q$ où $q \in \mathbb{N}^*$ est le plus petit possible aboutit à une contradiction car $3q^2 = p^2$, donc p^2 et p sont des multiples

de 3, ce qui implique alors que q est aussi multiple de 3 :
L'écriture irréductible dans $\mathbb{Q}$ de $\sqrt{3}$ est impossible. Et ainsi $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.
La démonstration est analogue modulo 5 pour $\sqrt{5}$.

▹ Les nombres réels vérifient ces propriétés dès que $u\in\mathbb{Q}$ et $x\in\mathbb{R}$:

$$x\notin\mathbb{Q} \iff u+x\notin\mathbb{Q} \qquad x\notin\mathbb{Q} \text{ ET } ux\in\mathbb{Q} \implies u=0$$
$$x\notin\mathbb{Q} \text{ ET } u\neq 0 \implies ux\notin\mathbb{Q}$$

⊳⊳ Ces propriétés des nombres irrationnels se démontrent par leur contraposée ; l'addition et la multiplication sont des lois de composition sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} x\in\mathbb{Q} &\implies x+u\in\mathbb{Q} \\ &\implies (x+u)+(-u)=x\in\mathbb{Q} \qquad \text{car } -u\in\mathbb{Q} \\ x\in\mathbb{Q} &\iff u+x\in\mathbb{Q} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x\notin\mathbb{Q}\iff u+x\notin\mathbb{Q} \end{aligned}$$

$$u\neq 0 \text{ ET } ux\in\mathbb{Q} \implies \frac{1}{u}\,ux = x\in\mathbb{Q}$$
$$x\notin\mathbb{Q} \implies u=0 \text{ OU } ux\notin\mathbb{Q}$$
$$x\notin\mathbb{Q} \text{ ET } ux\in\mathbb{Q} \implies u=0$$
$$x\notin\mathbb{Q} \text{ ET } u\neq 0 \implies ux\notin\mathbb{Q}$$

Ces deux dernières propositions proviennent de la précédente.

▹ Les nombres $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ sont irrationnels.

⊳⊳ La preuve que $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$ est la même que celle faite pour $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. La démonstration de $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ correspond aux propriétés des opérations sur les nombres rationnels. Une preuve par l'absurde suppose que $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ et aboutit à cette contradiction :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q} &\implies \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5+2\sqrt{6}\in\mathbb{Q} \\ &\implies \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 - 5 = 2\sqrt{6}\in\mathbb{Q} \\ &\implies \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-5}{2} = \sqrt{6}\in\mathbb{Q} \end{aligned}$$

Cette conclusion étant fausse, l'hypothèse $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ est fausse.

★ La somme et le produit de deux nombres irrationnels peuvent aussi bien être rationnel qu'irrationnel :

$$\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q} \qquad \sqrt{2}\times\sqrt{8}=4\in\mathbb{Q}$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin\mathbb{Q} \qquad \sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$$

élément neutre et des symétriques

Dans ce paragraphe E est un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$, et $(x,y,z)\in E^3$. Il justifie certaines des propriétés de l'addition ou de la multiplication.

□ L'élément neutre d'une loi de composition interne, s'il existe, est unique.

◊ Si e_1 et e_2 sont deux éléments neutres de la structure $(E,\star)$ alors la définition de l'élément neutre e_1 appliquée à $x=e_2$ et celle de l'élément neutre e_2 appliquée à $x=e_1$ jutifient l'unicité de l'élément neutre :

$$e_2 = e_1\star e_2 = e_1$$

La suite de ce paragraphe suppose que la loi de composition interne $\star$ est associative et possède un élément neutre e.

□ Le symétrique d'un élément x, s'il existe, est unique et est noté x^{-1}.

◊ Si $\widetilde{x}$ et $\widehat{x}$ sont des symétriques de x, alors la définition du symétrique et l'associativité de la loi $\star$ aboutissent à ces égalités prouvant l'unicité :

$$\widehat{x} = \widehat{x}\star e = \widehat{x}\star(x\star\widetilde{x}) = (\widehat{x}\star x)\star\widetilde{x} = e\star\widetilde{x} = \widetilde{x}$$

∗ Les éléments neutres 0 pour l'addition et 1 pour la multiplication sont uniques, de même l'opposé $-x$ d'un nombre x et l'inverse $1/x$ si $x\neq 0$.

□ Tout élément ayant un symétrique est régulier.

◊ Un produit par u^{-1} justifie que tout élément inversible u est régulier :

$$\begin{aligned} &u\star x = u\star y & &x\star u = y\star u \\ \implies &u^{-1}\star u\star x = u^{-1}\star u\star y & \implies &x\star u\star u^{-1} = y\star u\star u^{-1} \\ \implies &e\star x = e\star y & \implies &x\star e = y\star e \\ \implies &x = y & \implies &x = y \end{aligned}$$

∗ Ainsi tout réel est régulier pour l'addition, et tout réel non nul est régulier pour la multiplication.

□ L'élément neutre e est son propre symétrique ; si les symétriques de x et de y existent alors x^{-1} et $x\star y$ possèdent un symétrique :

$$e^{-1}=e \qquad \left(x^{-1}\right)^{-1}=x \qquad (x\star y)^{-1} = y^{-1}\star x^{-1}$$

◊ Appliquer la définition de l'élément neutre e au cas particulier $x=e$

correspond à la définition du symétrique de e : $e \star e = e \Longrightarrow e^{-1} = e$.

$\lozenge$ Les caractérisations de x^{-1} et de $(x^{-1})^{-1}$ sont les mêmes :

$$x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e \Longrightarrow (x^{-1})^{-1} = x$$

$\lozenge$ L'associativité de la loi $\star$ vérifie que l'inverse d'un produit est, écrit dans l'autre sens, le produit des inverses :

$$(x \star y) \star (y^{-1} \star x^{-1}) = x \star (y \star y^{-1}) \star x^{-1} = x \star e \star x^{-1} = x \star x^{-1} = e$$
$$(y^{-1} \star x^{-1}) \star (x \star y) = y^{-1} \star (x^{-1} \star x) \star y = y^{-1} \star e \star y = y^{-1} \star y = e$$

$*$ Cette propriété s'applique en particulier à l'addition et la multiplication de réels qui sont commutatives :

$$-0 = 0 \qquad -(-x) = x \qquad \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$
$$-(x+y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y) = -x - y$$
$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{y}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\frac{1}{y} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0$$

$\square$ Si la loi $\perp$ est régulière et possède un élément neutre a, et si la loi $\star$ est distributive par rapport à la loi $\perp$, alors a est un élément absorbant pour la loi $\star$.

$\lozenge$ Une preuve provient de la régularité de la loi $\perp$ appliquée à ces égalités :

$$(x \star a) \perp a = x \star a = x \star (a \perp a) = (x \star a) \perp (x \star a) \Longrightarrow a = x \star a$$
$$(a \star x) \perp a = a \star x = (a \perp a) \star x = (a \star x) \perp (a \star x) \Longrightarrow a = a \star x$$

$*$ Aux notations près cette propriété est la même que celle démontrant que $0x = 0$: l'élément nul pour l'addition est élément absorbant pour la multiplication.

Exemples d'équations et d'inégalités

$\triangleright$ Résoudre l'équation réelle $|x+2| + |x-4| = 5|x| - 1$ en étudiant les intervalles sur lesquels les restrictions de l'équation sont affines.

$\triangleright\!\triangleright$ La fonction auxiliaire f dépend donc de ces quatre intervalles :

$$f(x) = |x+2| + |x-4| - 5|x| + 1$$
$$]-\infty,\ -2] \qquad [-2,\ 0] \qquad [0,\ 4] \qquad [4,\ +\infty[$$

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	$x+2$	
$\lvert x-4\rvert$	$-x+4$	$-x+4$	$-x+4$	$x-4$	
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x	x	
$f(x)$	$3x+3$	$5x+7$	$-5x+7$	$-3x-1$	

Parmi les solutions éventuelles qui sont -1 sur $]-\infty,\ -2]$, $-7/5$ sur $[-2,\ 0]$, $7/5$ sur $[0,\ 4]$ et $-1/3$ sur $[4,\ +\infty[$, seuls les deux nombres $\pm 7/5$ conviennent car ils appartiennent à l'intervalle considéré.

$\triangleright$ Exprimer l'application f définies ci-dessous comme somme de termes de la forme $\lambda|x-a|$ avec $a \in \{-1, 2\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec une éventuelle application affine :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x \in]-\infty,\ -1] \\ x & \text{pour } x \in [-1,\ 2] \\ 2 & \text{pour } x \in [2,\ +\infty[\end{cases}$$

$\triangleright\!\triangleright$ Le but consiste à rechercher $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant l'égalité suivante. L'étude par intervalle fournit un système d'équations :

$$f(x) = \alpha|x+1| + \beta|x-2| + \gamma x + \delta$$

x	$-\infty$	-1	2	$-\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	
$f(x)$	-1	x	2	

$$\begin{cases} (-\alpha - \beta + \gamma)\, x - \alpha + 2\beta + \delta = -1 \\ (\alpha - \beta + \gamma)\, x + \alpha + 2\beta + \delta = x \\ (\alpha + \beta + \gamma)\, x + \alpha - 2\beta + \delta = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \delta = -1 \\ \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \delta = 2 \end{cases}$$

Les deux systèmes sont équivalents, le second est obtenu en identifiant les coefficients des termes en x et les termes constants dans les équations.
Les trois équations $\pm\alpha \pm \beta + \gamma$ en (α, β, γ) fournissent par sommes et différences une condition nécessaire $(\alpha, \beta, \gamma) = (1/2, -1/2, 0)$ de solution du système. La valeur éventuelle de δ s'obtient par substitution :

$$\delta = -1 + \alpha - 2\beta = -\alpha - 2\beta = 2 - \alpha + 2\beta$$
$$= \quad 1/2 \quad = \quad 1/2 \quad = \quad 1/2$$

La seule solution possible est $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1/2, -1/2, 0, 1/2)$.
Réciproquement une vérification sur le tableau de l'expression de f justifie que ces valeurs sont bien solution :

$$f(x) = \frac{|x+1|}{2} - \frac{|x-2|}{2} + \frac{1}{2}$$

▷ La partie entière vérifie l'égalité $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right) = \mathrm{E}(x)$.

⊳⊳ La méthode pratique s'applique ici :

$$n \in \mathbb{N}^* \qquad x \in \mathbb{R} \qquad p = \mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z} \qquad h = x - \mathrm{E}(x) \in [0,\ 1[$$

$$\begin{aligned} p = \mathrm{E}(x) \leq x < p+1 &\Longrightarrow np \leq nx = n(p+h) < n(p+1) \\ &\Longrightarrow np = \mathrm{E}(np) \leq \mathrm{E}(nx) \leq nx < np + n \\ &\Longrightarrow p \leq \frac{\mathrm{E}(nx)}{n} < p+1 \\ &\Longrightarrow \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right) = p \end{aligned}$$

▷ L'étude d'une fonction auxiliaire prouve cette inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1 - \frac{x}{2} \qquad \text{lorsque } x \geq 0$$

⊳⊳ L'application auxiliaire φ est définie par différence :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2}$$

x	0		$+\infty$
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$+$

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{2(1+x)^{3/2}} + \frac{1}{2} \geq 0 \qquad \text{car } (1+x)^{3/2} \geq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi(x) \geq 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1 - \frac{x}{2}$$

⊳⊳ Une deuxième démonstration de l'inégalité $1/\sqrt{1+x} \geq 1 - x/2$ si $x \geq 0$ exploite les méthodes algébriques usuelles. Cette inégalité est vérifiée lorsque $x \geq 1/2$ car un membre est positif et l'autre négatif. La suite de la preuve suppose $x \in [0,\ 1/2[$ et démontre l'inégalité sur les carrés des deux membres qui sont positifs :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1 - \frac{x}{2} &\Longleftrightarrow \frac{1}{1+x} \geq 1 - x + \frac{x^2}{4} \\ &\Longleftrightarrow 1 \geq \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right)(1+x) = 1 - x + \frac{x^2}{4} + x - x^2 + \frac{x^3}{4} \\ &\Longleftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{4} \\ &\Longleftrightarrow 0 \geq \frac{x^2}{4}(x-3) \qquad \text{vrai pour tout } x \in [0,\ 1/2[\end{aligned}$$

▷ L'inégalité suivante découle de la précédente :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \qquad \text{pour } x > 0$$

⊳⊳ Le changement de variable $y = 1/x \in \mathbb{R}_+^*$ transforme cette inégalité en la précédente puis un factorisation par $y > 0$ termine la démonstration :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}}} = \frac{y}{\sqrt{1+y}} \geq y - \frac{y^2}{2} = \frac{1}{\frac{1}{y}} - \frac{1}{2\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

$$\text{car} \frac{1}{\sqrt{1+y}} \geq 1 - \frac{y}{2} \text{ et par produit } \frac{y}{\sqrt{1+y}} \geq y - \frac{y^2}{2} \text{ par } y > 0$$

Une preuve par une fonction auxilaire est aussi possible.