Exercice 14 Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'algorithme de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$$

Exercice 15 Soit m un réel.

1. Résoudre le système suivant $\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$ (on pourra discuter en fonction de m).
2. Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Exercice 16 Pour tout paramètre $m \in \mathbb{R}$, on considère le système :

$$(S_m) : \begin{cases} x & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & my & + & 4z & = & 8 - m \\ -x & - & my & + & (m^2 - 3m - 2)z & = & 2m - 4 \end{cases}$$

1. Indiquer le nombre de solutions en fonction du paramètre m .
2. Donner l'ensemble des solutions dans le cas $m = 0$, puis dans le cas $m = 1$.

Exercice 17 Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système $\begin{cases} ax + (1 - a)y + (1 - a)z = a^2 \\ ax + (1 + a)y + (1 + a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases}$

Exercice 18 L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère $\mathcal{P}_1$ (respectivement $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : & 2x - 3y + 4z = -3 \\ \mathcal{P}_2 : & -x + 2y + z = 5 \\ \mathcal{P}_3 : & 4x - 5y + 14z = 1 \end{aligned}$$

1. Quelle est la nature géométrique de chacun des $\mathcal{P}_i$?
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Quelle est sa nature géométrique ?

Exercice 14 Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'algorithme de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$$

Notons $(\mathcal{S})$ le système. Alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -3y + 3z = m - 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 & L_2 \leftarrow L_2 / -2 \\ -3y + 3z = m - 1 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = m + 2 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut alors discuter suivant les valeurs de m :

- Si $m + 2 \neq 0$, c'est-à-dire si $m \neq -2$, le système n'admet pas de solutions.
- Si $m = -2$, alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est alors $\{(0, z + 1, z); z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 15Soit m un réel.

- Résoudre le système suivant $\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$ (on pourra discuter en fonction de m).
- Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

On applique la méthode du pivot de Gauss. En laissant inchangée la première ligne et en faisant $L_2 - mL_1 \rightarrow L_2$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ (4 - m^2)y = 6 + 3m = 3(m + 2) \end{cases}$$

Discutons alors suivant les valeurs de m .

- Si $m \neq 2$ et $m \neq -2$, $4 - m^2$ ne s'annule pas. On en déduit que

$$y = \frac{3(m + 2)}{4 - m^2} = \frac{3(m + 2)}{(2 - m)(2 + m)} = \frac{-3}{m - 2}.$$

On reporte ceci dans la première équation et on trouve

$$x = -3 - my = -3 + \frac{3m}{m - 2} = \frac{-3m + 6 + 3m}{m - 2} = \frac{6}{m - 2}.$$

Le système admet donc une unique solution qui est $\left(\frac{6}{m-2}, \frac{-3}{m-2}\right)$.

- Si $m = 2$, alors la dernière ligne devient $0 = 12$. Le système n'admet pas de solutions.
- Si $m = -2$, alors la dernière ligne devient $0 = 0$ et le système est équivalent à

$$x - 2y = -3 \iff x = -3 + 2y.$$

L'ensemble des solutions est alors

$$\mathcal{S} = \{(-3 + 2y, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Géométriquement, on peut en déduire que les deux droites $x + my = -3$ et $mx + 4y = 6$ sont

- sécantes si $m \neq 2, -2$;
- parallèles strictement si $m = 2$;
- confondues si $m = -2$.

Exercice 16

Pour tout paramètre $m \in \mathbb{R}$, on considère le système :

$$(S_m) : \begin{cases} x & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & my & + & 4z & = & 8 - m \\ -x & - & my & + & (m^2 - 3m - 2)z & = & 2m - 4 \end{cases}$$

1. Indiquer le nombre de solutions en fonction du paramètre m .
2. Donner l'ensemble des solutions dans le cas $m = 0$, puis dans le cas $m = 1$.

1. On commence par chercher un système triangulaire équivalent :

$$(S_m) \iff \begin{cases} x & + & 2z & = & 4 \\ & my & & = & -m & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & -my & + & (m^2 - 3m)z & = & 2m & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & 2z & = & 4 \\ & my & & = & -m \\ & & (m^2 - 3m)z & = & m & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

Remarquons aussi que $m^2 - 3m = m(m - 3)$. On distingue alors 3 cas :

- Si $m \neq 0$ et $m \neq 3$, le système est triangulaire et les coefficients diagonaux sont non nuls : le système admet une unique solution.
- Si $m = 0$, le système est équivalent à l'unique équation $x + 2z = 4$, dont l'ensemble des solutions est infini.
- Si $m = 3$, la dernière ligne du système est $0 = 3$, et le système n'admet pas de solutions.

2. Lorsque $m = 0$, on peut réécrire l'unique équation restante, $x + 2z = 4$, sous la forme $x = 4 - 2z$. L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_0 = \{(4 - 2z, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$. Si $m = 1$, la résolution du système triangulaire donne immédiatement $\mathcal{S}_1 = \{(5, -1, -1/2)\}$.

Exercice 17

Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système
$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss en choisissant la troisième ligne comme pivot :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + z = 1 - a & L_3 \\ y + z = 0 & L_2 - aL_3 \\ (1-2a)y + (1-2a)z = 2a^2 - a & L_1 - aL_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 - a \\ y + z = 0 \\ a(2a - 1) = 0 \end{cases}$$

On distingue alors plusieurs cas. Si $a \notin \{0, 1/2\}$, le système n'est pas compatible et n'admet donc pas de solutions. Si $a = 0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1, y, -y); y \in \mathbb{R}\}$. Si $a = 1/2$, le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = 1/2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1/2, y, -y); y \in \mathbb{R}\}$.

$M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1: 2x - 3y + 4z = -3$$

$$\mathcal{P}_2: -x + 2y + z = 5$$

$$\mathcal{P}_3: 4x - 5y + 14z = 1$$

1. Quelle est la nature géométrique de chacun des $\mathcal{P}_i$?
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Quelle est sa nature géométrique ?

1. Chaque $\mathcal{P}_i$ est un plan.

2. Un point $M(x, y, z)$ est dans l'intersection de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ si et seulement s'il vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 4z = -3 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases}$$

On résout ce système à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss. Notons $(\mathcal{S})$ ce système. Alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \\ 3y + 18z = 21 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 + 4L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \\ 0 = 0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x = 9 - 11z \\ y = 7 - 6z \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{(9 - 11z, 7 - 6z, z), z \in \mathbb{R}\}$. Il s'agit d'une droite passant par le point $(9, 7, 0)$ et de vecteur directeur $(-11, -6, 1)$.

Exercice 19 ★ Résoudre le système suivant, où x , y et z sont des réels positifs :
$$\begin{cases} x^3 y^2 z^6 = 1 \\ x^4 y^5 z^{12} = 2 \\ x^2 y^2 z^5 = 3. \end{cases}$$

On pose $a = \ln x$, $b = \ln y$ et $c = \ln z$ et notons (S) le système. La fonction logarithme étant injective, on a :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0 \\ 4a + 5b + 12c = \ln 2 \\ 2a + 2b + 5c = \ln 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0 \\ 7b + 12c = 3 \ln 2 \\ 2b + 3c = 3 \ln 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3a + 2b + 6c = 0 \\ 7b + 12c = 3 \ln 2 \\ -3c = 21 \ln 3 - 6 \ln 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -2 \ln 2 + 6 \ln 3 \\ b = -3 \ln 2 + 12 \ln 3 \\ c = 2 \ln 2 - 7 \ln 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci donne finalement comme unique solution

$$\begin{cases} x = 2^{-2} 3^6 \\ y = 2^{-3} 3^{12} \\ z = 2^2 3^{-7}. \end{cases}$$

Exercice 9 Soient α, β deux réels et $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha, \beta}$ est surjective.

La matrice est donc de rang 3, sauf si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$.

Exercice 10 Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 Soit B la matrice diagonale par blocs $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de B en fonction du rang des A_i .

Exercice 12 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \sin(i+j)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sin(k-1) + \sin(k+1) = 2\cos(1)\sin(k)$.
2. Déterminer le rang de A .

Exercice 13 Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda \mathbb{1}_3$ ne soit pas inversible.

Exercice 9 Soient α, β deux réels et $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha, \beta}$ est surjective.

La matrice est donc de rang 3, sauf si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$.

Exercice 10 Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \end{pmatrix}$.

On obtient une matrice triangulaire, dont les pivots sont non nuls si $1 - a^4 \neq 0$, ie si $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Dans ce cas, la matrice est de rang 4. Si $a = 1$ ou $a = -1$, la matrice A a même rang qu'une matrice dont une seule ligne est non-nulle. Elle a donc pour rang 1.

Exercice 11 Soit B la matrice diagonale par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de B en fonction du rang des A_i .

Exercice 12 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \sin(i+j)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sin(k-1) + \sin(k+1) = 2\cos(1)\sin(k)$.
2. Déterminer le rang de A .

Exercice 13 Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda \mathbb{1}_3$ ne soit pas inversible.

Exercice 9 Soient α, β deux réels et $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha, \beta}$ est surjective.

La matrice est donc de rang 3, sauf si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$.

Exercice 10 Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \end{pmatrix}$.

On obtient une matrice triangulaire, dont les pivots sont non nuls si $1 - a^4 \neq 0$, ie si $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Dans ce cas, la matrice est de rang 4. Si $a = 1$ ou $a = -1$, la matrice A a même rang qu'une matrice dont une seule ligne est non-nulle. Elle a donc pour rang 1.

Exercice 11 Soit B la matrice diagonale par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de B en fonction du rang des A **$\text{rg}(B) = (m_1 + \dots + m_n) - \dim(\ker(B)) = r_1 + \dots + r_n$.**

Exercice 12 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \sin(i+j)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sin(k-1) + \sin(k+1) = 2\cos(1)\sin(k)$.
2. Déterminer le rang de A .

Exercice 13 Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda \mathbb{1}_3$ ne soit pas inversible.

Exercice 9 Soient α, β deux réels et $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha, \beta}$ est surjective.

La matrice est donc de rang 3, sauf si $\alpha = 22$ et $\beta = 4$.

Exercice 10 Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \end{pmatrix}$.

On obtient une matrice triangulaire, dont les pivots sont non nuls si $1 - a^4 \neq 0$, ie si $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Dans ce cas, la matrice est de rang 4. Si $a = 1$ ou $a = -1$, la matrice A a même rang qu'une matrice dont une seule ligne est non-nulle. Elle a donc pour rang 1.

Exercice 11 Soit B la matrice diagonale par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$.

Calculer le rang de B en fonction du rang des A **$\text{rg}(B) = (m_1 + \dots + m_n) - \dim(\ker(B)) = r_1 + \dots + r_n$.**

Exercice 12 Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \sin(i+j)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sin(k-1) + \sin(k+1) = 2\cos(1)\sin(k)$.
2. Déterminer le rang de A .

Exercice 13 Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda \mathbb{1}_3$ ne soit pas inversible.