

Colle : Dénombrement

1 Pour commencer

Un petit exercice d'arithmétique ou sur les congruences.

2 Question de cours

1. preuve de « Si E est de cardinal fini et $a \in E$ alors $|E \setminus \{a\}| = |E| - 1$ »
2. preuve de si E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f \in F^E$ alors f injective $\Leftrightarrow f$ surjective. »
3. valeur et justification de $|F^E|$ et $|\mathcal{P}(E)|$.
4. Calcul du nombre de p -arrangements dans un ensemble de cardinal n .
5. Preuve par les dénombrements de « $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ »
6. preuve par les dénombrements du binôme de Newton.

3 Exercices

3.1 Exercices à rédiger

1. Dans un jeu de poker (main de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes)
 - a) Combien de mains possibles ?
 - b) Combien de mains valent une paire ?
 - c) Combien de mains valent un brelan, une couleur, deux paires ?
2. Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \text{Card}A$.
 - a) Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?
 - b) Combien y a-t-il de parties X de E à $m \in \{p, \dots, n\}$ éléments contenant A ?
 - c) Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

3.2 Exercices d'entraînement

1. A, B, C et D étant des ensembles
 - a) Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
 - b) Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$
2. Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E .

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	e) Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	f) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
c) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.	g) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.
d) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	
3. Si A et B sont deux ensembles alors on note $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
 Soit E un ensemble et A, B et C trois parties de E .

a) Montrer que

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B}) = A \cap C \cap \overline{B}.$$

b) En déduire que $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$

4. Soient A et B deux parties de E et F .

Étant donnée une application $f : E \rightarrow F$, est-il vrai que :

a) Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F .

b) Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E .

c) Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E .

d) Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

5. Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur un ensemble E à n éléments?

6. Soit E un ensemble à n éléments.

a) Soit X une partie à p éléments de E .

Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

b) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?