MPSI2

Dénombrement - exercices

Exercice 1 Soient $E = \{1, \dots, n\}$ et $F = \{1 \dots, p\}$ avec $n, p \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$.

1. Combien y a-t-il d'applications constantes de E vers F ?

2. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

3. Combien y a-t-il d'applications strictement monotones de E vers F ?

4. Combien y a-t-il d'applications croissantes de E vers F ?

5. Combien y a-t-il d'applications monotones de E vers F ?

Solution

(a) Une application constante de E vers F est entièrement déterminée par le choix de la valeur de sa constante dans F. Il y a p choix possibles et donc p applications constantes de E vers F.

(b) Une application $f : E \to F$ strictement croissante est entièrement déterminée par son image qui est une partie formée de n éléments de F: il suffit d'ordonner les n éléments qui constituent cette image pour définir l'application strictement croissante associée.
Si $p \geq n$: il y a $\binom{p}{n}$ parties à n éléments dans F et donc autant d'applications strictement croissantes de E vers F.

Si $p < n$: il n'y a pas de parties à n éléments dans F et donc pas d'applications strictement croissantes de E vers F. Cela correspond encore à la valeur de $\binom{p}{n}$.

(c) Par le même raisonnement, il y autant d'applications strictement décroissantes que d'applications strictement croissantes. De plus, les applications strictement croissantes sont distinctes des applications strictement décroissantes. Au total, il y a $2\binom{n}{p}$ applications strictement monotones de E vers F.

(d) À une application $f : E \to F$, on associe $g : E \to G$ définie par

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ g(k) = f(k) + k - 1 \text{ avec } G = \{1, \ldots, p + n - 1\}$$

Par cette association, on fait se correspondre de façon bijective les applications croissantes de E vers F et les applications strictement croissantes de E vers G. Il y a donc $\binom{n+p-1}{n}$ applications croissantes de E vers F.

(e) En composant une application à valeurs dans F avec l'application $h : F \to F$ donnée par $h(k) = p + 1 - k$, on fait se correspondre de façon bijective les applications croissantes de E vers F et les applications décroissantes de E vers F. Il y a donc exactement $\binom{n+p-1}{n}$ applications décroissantes de E vers F. Aussi, les applications à la fois croissantes et décroissantes de E vers F sont les applications constantes, il y en a p. Au final, il y a

$$2\binom{n+p-1}{n} - p$$

applications monotones de E vers F.

Exercice 2 Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

2. Dans les questions suivantes, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 3 Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

Exercice 4 Dans cet exercice, on attend des réponses qui ne sont pas des valeurs numériques, mais des expressions en termes de factorielles, sous la forme la plus simple possible.

1. Combien y-a-t-il de façons de répartir les 52 cartes d'un jeu entre 4 joueurs N, S, E, O, chacun possédant 13 cartes.

2. Parmi ces façons, combien y-en-a-t-il qui sont telles que chaque joueur n'a qu'une seule couleur (par exemple, N a les 13 piques, S a les 13 coeurs,...) ?

3. Combien y-a-t-il de façons que deux joueurs quelconques aient chacun une seule couleur ?

4. Combien y-a-t-il de façons que deux partenaires, c'est-à-dire (N,S) ou (E,O), aient chacun une seule couleur, les deux autres partenaires ayant des cartes quelconques.

1.

1.1. Il y a $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ codes possibles.

1.2. Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9 \times 9 \times 4$ tels codes.

1.3. On va compter par différence. Il y a $8 \times 8 \times 8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9 \times 9 \times 9 - 8 \times 8 \times 8 = 217$ codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

1.4. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3 \times 8 \times 8$ tels codes.

2.

2.1. On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9 \times 8 \times 7$ choix possibles.

2.2. Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8 \times 7 \times 5$ tels codes.

2.3. Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles (rappelons que tous les chiffres sont distincts). Le nombre de tels codes est donc de $8 \times 7 \times 3$.

Une anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

- MATHS : 5!
- RIRE : 4!/2!
- ANANAS : 6!/(2!3!)

Pour compter les anagrammes d'ANANAS, on peut aussi :

- choisir la position des 3 lettres A : il y a $\binom{6}{3}$ choix possibles;
- choisir la position des 2 lettres N : il y a $\binom{3}{2}$ choix possibles (il reste 3 places une fois qu'on a placé les A);
- le S est alors placé.

Le nombre d'anagrammes d'ANANAS est donc

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 3!}.$$

1. Il y a $\binom{52}{13}$ choix possibles pour le premier joueur, puis $\binom{52-13}{13} = \binom{39}{13}$ choix possibles pour le deuxième joueur, et encore $\binom{39-13}{13} = \binom{26}{13}$ pour le troisième. Le dernier joueur prend les 13 cartes restantes. Au total on trouve

$$\binom{52}{13} \times \binom{39}{13} \times \binom{26}{13} = \frac{52!}{39!13!} \times \frac{39!}{26!13!} \times \frac{26!}{13! \times 13!} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

2. On choisit une couleur parmi 4 pour le premier joueur, puis une couleur parmi 3 pour le deuxième et enfin une couleur parmi 2 pour le troisième. Cela fait $4!$ possibilités. On peut aussi argumenter à l'aide du nombre de permutation de 4 couleurs.

3. On commence par choisir les deux joueurs qui ont la même couleur. Il y a $\binom{4}{2}$ tels choix. On choisit ensuite une couleur parmi 4 pour le premier joueur, et une couleur parmi 3 pour le deuxième joueur. Il reste pour le 3ème joueur à choisir 13 cartes parmi les 26 restantes tandis que le quatrième prend le reste. On trouve donc :

$$\frac{4 \times 3}{2} \times 4 \times 3 \times \binom{26}{13} = \frac{72 \times (26)!}{(13!)^2}.$$

Mais ce faisant, on a compté trop les tirages où les 4 joueurs ont une seule couleur : en effet, un tel tirage est compté $\binom{4}{2}$ fois, puisqu'on a choisit deux joueurs qui avaient la même couleur et que cela n'a pas lieu d'être dans ce cas là puisque tous les joueurs ont la même couleur. Il faut donc retirer $\left(\binom{4}{2} - 1\right) 4!$ et le résultat final est :

$$\frac{4 \times 3}{2} \times 4 \times 3 \times \binom{26}{13} - \left(\binom{4}{2} - 1\right) 4! = \frac{72 \times (26)!}{(13!)^2} - 5 \times 4!.$$

4. Le dénombrement à réaliser est très similaire, mais il y a moins de choix pour choisir les deux joueurs qui ont la même couleur puisqu'on ne choisit plus deux joueurs quelconques, mais deux partenaires. Il n'y a donc que 2 choix au lieu de $\binom{4}{2}$. Finalement, on trouve $\frac{24 \times (26)!}{(13!)^2} - 4!$.

Exercice 5 On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.

2. contenant 5 carreaux ou 5 piques.

3. contenant 2 carreaux et 3 piques.

4. contenant au moins un roi.

5. contenant au plus un roi.

6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

Exercice 6 Soit $n \geq 2$ un entier. Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $\{1, \ldots, n\}^2$ tels que

1. $x + y = n$; **2.** $x < y$; **3.** $|x - y| \leq 1$;

1. Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a : $\binom{32}{5} = 201376$ tirages différents.

2. Pour obtenir 5 carreaux, il faut choisir 5 cartes parmi 8 : il y a $\binom{8}{5}$ tels tirages. De même pour obtenir 5 piques. Comme les deux cas sont disjoints, il y a $2 \times \binom{8}{5} = 112$ tels tirages différents.

3. Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir 3 piques. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568$.

4. On compte le complémentaire, c'est-à-dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a $\binom{28}{5}$ tels tirages. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096$.

5. On a déjà compté les tirages sans roi. Pour les tirages comprenant exactement un roi, il y a 4 façons de choisir le roi, puis, pour chacune de ces façons, $\binom{28}{4}$ façons de choisir les autres cartes. On en déduit qu'il y a $\binom{28}{5} + 4\binom{28}{4} = 180180$ tels tirages.

6. On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique.

- si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).
- si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les deux autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc $32 - (4 + 7) = 21$ choix (attention à ne pas compter à nouveau deux fois le roi de pique!).

Finalement, le nombre de tirages possibles est :

$$\binom{3}{2} \times \binom{7}{3} + 3 \times \binom{7}{2} \times 21 = 1428.$$

1. On peut choisir x quelconque dans $\{1, \ldots, n-1\}$. Une fois ce x fixé, y est déterminé par la formule $y = n - x$ (et y est bien dans $\{1, \ldots, n\}$). Il y a donc $n - 1$ tels couples.
2. On choisit d'abord x dans $\{1, \ldots, n-1\}$. Une fois cette valeur de x fixée, y peut prendre n'importe quelle valeur dans $\{x+1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire que y peut prendre $n - x$ valeurs. Le nombre recherché est donc

$$\sum_{x=1}^{n-1}(n-x) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

(on a procédé à un changement d'indice $k = n - x$).
3. Si $x = 1$, il y a deux choix pour y, 1 et 2. Si $x = n$, il y a deux choix pour y, $n - 1$ et n. Sinon, il y a trois choix pour y, les entiers $x - 1$, x et $x + 1$. On a donc en tout $2 + 2 + 3(n-2) = 3n - 2$ tels couples.

Exercice 7

1. Quel est le coefficient de $a^2b^5c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?
2. Même question avec $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_p^{k_p}$ dans $(a_1+a_2+\dots+a_p)^n$?

Exercice 8 On trace dans un plan n droites en position générale (c'est-à-dire deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De combien de façons peut-on regrouper $2n$ individus par paires ?

Exercice 10 Soit n un entier non nul. On désigne par u_n le nombre de listes de n termes, chaque terme étant 0 ou 1, et n'ayant pas deux termes 1 consécutifs.

1. Que vaut u_1 ? u_2 ?
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, on a $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
3. Application : un concours comporte vingt questions, numérotées de 1 à 20. On a constaté que, parmi les 17 712 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives.

   Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions ?

Exercice 11 On considère un ensemble X de $n+1$ entiers (distincts) choisis dans $\{1,\dots,2n\}$. Démontrer que parmi les éléments de X, on peut toujours trouver 2 entiers dont la somme fait $2n+1$.

Solution

(a) Dans le développement de

$$(a+b+c)^{10} = (a+b+c)\ (a+b+c)\ldots(a+b+c)$$

on obtient un terme $a^2b^5c^3$ en choisissant deux a, cinq b et trois c.
Il y a $\binom{10}{2}$ choix possibles pour les facteurs dont seront issus les a.
Une fois ceux-ci choisis, il y a $\binom{8}{5}$ choix possibles pour les facteurs fournissant les b.
Une fois ces choix faits, les trois facteurs restant fournissent les c.
Au total, il y a

$$\binom{10}{2}\binom{8}{5} = \frac{10!}{2!\ 5!\ 3!} = 2520$$

termes $a^2b^5c^3$ apparaissant lors du développement de $(a+b+c)^{10}$.

(b) On reprend le même protocole, pour obtenir

$$\frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \ldots k_p!}$$

si $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$ et 0 sinon.

Solution

Notons t_n le nombre de triangles formés.

$$t_0 = t_1 = t_2 = 0.$$

Pour $n \geq 3$, former un triangle revient à choisir les trois droites définissant ses côtés:

$$\text{il y a } \binom{n}{3} \text{ possibilités.}$$

Chacune de ses possibilités définit un véritable triangle (car il y a ni concourance, ni parallélisme) et les triangles obtenus sont deux à deux distincts.

Finalement,

$$t_n = \binom{n}{3}.$$

Solution

Notons m_n le nombre recherché.

Considérons $2n$ individus que l'on numérote de 1 à $2n$. On choisit avec qui on apparie l'individu numéro 1: il y a $2n-1$ choix possibles. Une fois ce choix effectué, il reste $2n-2$ individus à apparier, il y a m_{n-1} choix possibles. On en déduit la relation de récurrence

$$m_n = (2n-1)\, m_{n-1}.$$

Sachant $m_1 = 1$, on conclut

$$m_n = (2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

1. Il y a deux listes possibles à 1 terme, et aucune ne comporte deux 1 consécutifs. Donc $u_1 = 2$.
Il y a 4 listes à 2 termes, dont une seule comporte deux 1 consécutifs. Donc $u_2 = 3$.

2. Considérons une liste à n termes n'ayant pas deux 1 consécutifs.

- ou bien elle se termine par un 1. Le terme précédent est donc forcément un 0, et pour les $n-2$ premiers termes, la seule contrainte est qu'il n'y ait pas deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-2} telles listes.
- ou bien elle se termine par un 0. Il n'y a pas de contraintes sur les $n-1$ premiers termes, si ce n'est qu'il ne faut pas qu'il y ait deux 1 consécutifs. Il y a donc u_{n-1} telles listes.

On a donc réalisé une partition des listes à n termes ne comportant pas deux 1 consécutifs, et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

4. On peut associer à chaque questionnaire une liste de 0 et de 1, le i-ème terme vaut 1 si la réponse est juste, et 0 si la réponse est fausse. L'énoncé nous dit que les 17712 listes obtenues ne comportent deux termes 1 consécutifs. Or, il y a $u_{20} = 17711$ telles listes différentes. Deux des listes doivent donc être identiques, et il y a bien deux candidats qui ont répondu de la même manière aux questions.

Considérons les paires d'entiers dont la somme fait $2n+1$: ce sont $\{1,2n\}$, $\{2,2n-1\}$, $\{3,2n-2\},\dots,\{n,n+1\}$. On a donc défini ici n paires d'entiers, et chaque entier entre 1 et $2n$ est contenu dans une seule paire. Tous les entiers de X ne peuvent pas être dans des paires différentes, puisque X contient $n+1$ éléments. Donc il existe deux éléments de X dans la même paire, et leur somme fait $2n+1$.

Exercice 12 Soit $1 \leq p \leq n$. On considère n boules et deux boîtes A et B.
Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de $p-1$ boules dans la boîte B.

1. En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$.
2. Retrouver cette formule par le calcul.

Exercice 13 Un livre comporte 14 chapitres.

1. Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre ?
2. Pour $k = 3, \dots, 14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.
3. En déduire que $\binom{14}{3} = \binom{13}{2} + \binom{12}{2} + \cdots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$.
4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1 \leq p \leq n$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 14 Démontrer par un dénombrement que, pour $n \geq 1$, on a : $\binom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Voici deux façons de compter le nombre d'échantillons.

- On choisit d'abord une boule à mettre dans la boîte A : il y a n choix possibles. Puis on choisit $p-1$ boules parmi les $n-1$ boules restantes pour mettre dans la boîte B. Il y a donc $n \times \binom{n-1}{p-1}$ échantillons.
- On choisit d'abord les p boules parmi n qui seront dans les deux boîtes : il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles. Puis on choisit parmi ces p boules celle à mettre dans la boîte A : il y a p choix possibles, et donc le nombre d'échantillons recherché est $p \times \binom{n}{p}$.

Puisqu'on compte de deux façons différentes le même nombre d'échantillons, on obtient bien le résultat escompté. Par le calcul, on a

$$n\binom{n-1}{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!} = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = p\binom{n}{p}.$$

1. C'est du cours! Il y en a exactement $\binom{14}{3}$.

2. Une fois le numéro k du plus grand chapitre choisi, il reste 2 chapitres à choisir parmi $k-1$: il y a donc exactement $\binom{k-1}{2}$ choix de chapitres dont le dernier porte le numéro k.

3. On réalise une partition de l'ensemble des parties à 3 éléments en fixant le plus grand élément valant de 3 à 14. On a donc

$$\binom{14}{3} = \sum_{k=3}^{14} \binom{k-1}{2}$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

4. On part cette fois d'un livre comprenant $n+1$ chapitres et on en sélectionne $p+1$. Il y a $\binom{n+1}{p+1}$ choix possibles. On étudie ensuite le nombre de choix possibles où le plus grand des chapitres porte le numéro k, pour k allant de $p+1$ à $n+1$: il y en a $\binom{k-1}{p}$ (reste p chapitres à choisir parmi ceux numérotés de 1 à $k-1$). On a donc

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} \binom{k-1}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Le coefficient binomial $\binom{n+1}{p+1}$ désigne le nombre de parties à $p+1$ éléments dans l'ensemble $\{0,\dots,n\}$ qui a $n+1$ éléments. Soit E une telle partie, et k le plus grand entier qu'elle contient. Puisque la partie contient $p+1$ éléments, on a $k\geq p$. De plus, cet élément choisi, il reste p éléments à choisir dans l'ensemble $\{0,\dots,k-1\}$ qui contient k éléments, c'est-à-dire qu'il reste $\binom{k}{p}$ choix.

Une autre méthode pour démontrer cette propriété est de procéder par récurrence sur n. La formule est clairement vraie pour $n=0$ (ce qui implique $p=0$). Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que pour tout $p\leq n$, la formule donnée est vérifiée. Prouvons-la au rang $n+1$. Pour cela, prenons $p\leq n+1$. Si $p\leq n$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}&=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p}\\&=\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}\ \text{(hypothèse de récurrence)}\\&=\binom{n+2}{p+1}\ \text{(formule du triangle de Pascal).}\end{aligned}$$

Si $p=n+1$, la formule est aussi vérifiée. La propriété est donc aussi vraie au rang $n+1$.
On peut aussi démontrer la formule par "télescopage" en remarquant que, pour $k>p$, on a

$$\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$$

et donc que

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}&=\binom{p}{p}+\sum_{k=p+1}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)\\&=1+\binom{n+1}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}\\&=\binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

$\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments. Pour compter ce nombre de parties, on peut aussi diviser l'ensemble en deux sous-ensembles contenant chacun n éléments. Pour obtenir n éléments, on peut en prendre k dans le premier, ie $\binom{n}{k}$ choix, et $n-k$ dans le deuxième, soit $\binom{n}{n-k}$ choix. On a donc :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

puisque $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

On peut aussi démontrer ce résultat sans dénombrement en remarquant que $\binom{2n}{n}$ est le coefficient devant X^n du polynôme $(X+1)^{2n}$. On retrouve l'autre valeur en écrivant $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$ et en identifiant.

Exercice 15 On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ et $S_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ constitué des permutations possédant exactement $k \in [\![0;n]\!]$ points fixes. Enfin, on pose $s_n(k) = Card(S_n(k))$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_n(k)$.

2. Soient $n, k \geq 1$. En calculant de deux façons le nombre de couples (s, x) constitués de $s \in S_n(k)$ et x point fixe de s, établir $ks_n(k) = ns_{n-1}(k-1)$.

3. En déduire $s_n(k) = \displaystyle\binom{n}{k} s_{n-k}(0)$.

4. Retrouver directement le résultat précédent.

Solution

(a) La somme étudiée dénombre les permutations de $[\![1;n]\!]$ selon leur nombre de points fixes

$$\sum_{k=0}^{n} s_n(k) = \mathrm{Card}(\mathscr{S}_n) = n!\ .$$

(b) Pour chaque permutation de s de $\mathscr{S}_n(k)$ il y a k points fixes x possibles. Le nombre de couples cherché est donc $ks_n(k)$.
Pour chaque $x \in [\![1;n]\!]$, une permutation possédant k points fixes (dont x) est entièrement déterminée par sa restriction à $[\![1;n]\!] \setminus \{x\}$ qui est une permutation à $k-1$ points fixes. Ainsi, le nombre de couples cherché est aussi $ns_{n-1}(k-1)$.
(c) En itérant la formule ci-dessus obtenue

$$s_n(k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} s_{n-k}(0) = \binom{n}{k} s_{n-k}(0)\,.$$

(d) Pour déterminer une permutation élément de $\mathscr{S}_n(k)$, on choisit l'ensemble de ses k points fixes (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités) et l'on construit ses valeurs sur le complémentaire de l'ensemble des points fixes à partir d'une permutation de $n-k$ éléments sans points fixes (il y a $s_{n-k}(0)$ possibilités). Au total, il y a

$$\binom{n}{k} s_{n-k}(0)$$

applications de la forme voulue.