Colle : Probabilités

1 Pour commencer

Un petit exercice sur les polynômes.

2 Questions de cours.

1. Définition d'une probabilité
2. Définition d'une probabilité conditionnelle.
3. Énoncé et preuve de «la formule des probabilités composées»
4. Énoncé et preuve de «la formule des probabilités totales»
5. Énonce et preuve de la formule de Bayes.
6. Définition «d'un couple d'événements indépendants»
7. Définition « d'une famille d'événements mutuellement indépendants».

3 Exercices

Les exercices sur les dénombrements sont aussi au programme cette semaine.

3.1 Exercices à rédiger

1. Déterminer une probabilité P sur $\Omega = [\![1, n]\!]$ telle que $\forall k \in \Omega\ P(\{k\})$ soit proportionnelle à k^2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un groupe E de n personnes réunies de façon aléatoire.
   On note $\mathcal{A}$ l'événement « au moins deux personnes dans le groupe E ont leur anniversaire le même jour »
   Déterminer n pour que $P(\mathcal{A}) \geqslant \frac{1}{2}$
   On finit l'exercice en utilisant un moyen de calcul numérique comme python. Vous écrierez le programme.
3. Une succession d'individus $A_1, \ldots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui »ou « non ».
   Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçu par A_n soit identique à celle émise par A_1.
   On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

3.2 Exercices d'entraînement

1. Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles
   $$P(A \cap B \mid A \cup B) \text{ et } P(A \cap B \mid A)$$
2. On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ses coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

3. Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que :
   — 60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
   — 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.
   Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : "la boite est abîmée" et par D l'événement "la boite achetée contient au moins une clé défectueuse".
   a) Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D.
   b) Le client constate qu'un des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée ?
4. Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?