MPSI2

Variables aléatoires

Objectifs du chapitre :

- être capable d'appliquer ses connaissances en dénombrement pour déterminer correctement la loi d'une variable aléatoire.
- maitriser les techniques de calcul de l'espérance, de la variance et de la covariance.
- savoir repérer sans hésitation les variables aléatoires suivant une loi binomiale, et celles qui n'en suivent pas une.

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ensemble fini.

1/ Variables aléatoires finies

a) Définitions et notations

Définition

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

- Si E est un ensemble alors on appelle **variable aléatoire** toute application de Ω dans E.
- Si $E \subset \mathbb{R}$ alors on dit que la variable aléatoire est **réelle**

Remarque : On note $X(\Omega)$ l'univers image de la variable aléatoire X, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X (qui est bien l'image de l'ensemble Ω par l'application X).

Définition

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω.

- On note $(X = k)$ l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = k\}$.
- On utilisera de même la notation $(X < k)$ pour l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\omega) < k\}$ (et $(X \leq k)$, $(X < k)$ et $(X \geq k)$ pour des événements similaires).
- Plus généralement, $(X \in A)$ (on encore aussi $\{X \in A\}$) désigne l'événement $\{\omega \in \Omega | X(\Omega) \in A\}$ pour tout sous-ensemble A de $X(\Omega)$. Autrement dit, $(X \in A) = X^{-1}(A)$.

Propriété

- Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers , alors $X + Y, XY, \lambda X$ (où λ est un réel quelconque), $max(X, Y)$ et $min(X, Y)$ sont également des variables aléatoires.
- Plus généralement, X^2, X^3 ou n'importe quelle expression de la forme $f(X)$, où f est une fonction définie sur $X(\Omega)$, est une variable aléatoire sur Ω.

b) loi d'une variable aléatoire

Propriété

Soit X une variable aléatoire. L'application : $P_X : \begin{array}{l} \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1] \\ A \mapsto P(X \in A) \end{array}$ définit une loi de probabilité sur l'univers-image $X(\Omega)$ appelée loi de probabilité de la variable X. Elle est caractérisée par la donnée des probabilités $P(X = k)$ pour toutes les valeurs k appartenant à $X(\Omega)$.

Définition

Deux variables aléatoires X et Y ayant la même loi (et donc le même univers image) sont dites **identiquement distribuées**. On le note $X \sim Y$.

Remarques :

- La relation ainsi définie est de façon évidente une relation d'équivalence sur l'ensemble des variables aléatoires définies sur un même univers Ω.
- Pour calculer la loi d'une variable aléatoire, il suffit donc de déterminer toutes les valeurs qu'elle peut prendre, puis de calculer la probabilité de chaque résultat. On présente souvent les résultats sous forme d'un tableau (sauf dans le cas particulier des variables aléatoires usuelles pour lesquelles on connait les expressions de $P(X = k)$ en fonction de k)

Exemple 1 : Dans une urne se trouvent cinq jetons numérotés de 1 à 5. On en tire 3 simultanément et on note X le plus petit des trois numéros tirés. On a ici $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. On obtient alors la loi suivante :

valeurs de k	1	2	3	total
valeurs de $P(X = k)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

Propriété

Les événements $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements.

En particulier $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Démonstration : ces événements sont incompatibles (on ne peut pas avoir à la fois $X(\omega) = k$ et $X(\omega) = k'$ pour des valeurs différentes de k et k') et leur réunion est bien Ω tout entier puisque chaque élément ω de Ω a une image par X.

2/ Moments d'une variable aléatoire

Lorsqu'on s'intéresse à une variable aléatoire, il est intéressant de donner des caractéristiques d'ensemble de cette loi, comme la moyenne des valeurs prises (pondérées par leur probabilité d'apparition).
Ces paramètres sont les mêmes que ceux qu'on étudie en statistiques, et se rangent dans deux catégories donnant des informations complémentaires :

- **les paramètres de position** donnent une idée globale des valeurs prises par la variable aléatoire. Dans cette catégorie se situent la moyenne mais aussi par exemple la médiane
- **les paramètres de dispersion** qui eux servent à mesurer la répartition des valeurs prises par la variable aléatoire autour du paramètre de position (moyenne ou médiane). C'est le cas de l'écart-type (associé en général au calcul de moyenne) ou de l'écart absolu moyen (associé au calcul de médiane).
  (Par exemple, à moyenne fixée, plus l'écart-type est grand, plus les valeurs prises par la variable sont dispersées autour de la moyenne.)

a) espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un ensemble Ω.

- L'**espérance** d'une variable aléatoire X est définie par $E(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$
- Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$.

Remarque : on a aussi : $E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$

Exemple : dans notre exemple 1, on obtient : $E(X)=1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{15}{10}=1,5$

Propriétés de l'espérance

X et Y désignent deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω

- **linéarité :** Soient a, b deux réels. Alors $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$.

  En particulier : $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, $E(aX)=aE(X)$, ou encore $E(X+b)=E(X)+b$
- **positivité :** Une variable aléatoire positive (c'est-à-dire que $X(\Omega)\subset\mathbb{R}^+$) a nécessairement une espérance positive.
- **croissance :** Si $X\leq Y$ (c'est-à-dire : $\forall\omega\in X(\Omega),\ X(\omega)\leq Y(\omega)$), alors $E(X)\leq E(Y)$.
- **inégalité triangulaire :** $|E(X)|\leq E(|X|)$
- La variable aléatoire constante $X:\omega\mapsto a, a\in\mathbb{R}$, a pour espérance $E(X)=a$.

Démonstration :

- $E(X)=\sum_{k\in X(\Omega)} kP(X=k)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$

  Donc $E(aX+bY)=\sum_{\omega\in\Omega}(aX(\omega)+bY(\omega))P(\omega)=a\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega)+b\sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)P(\omega)=aE(X)+bE(Y)$.
- Tous les termes intervenant dans l'espérance de X étant positifs, la somme sera nécessairement positive.
- si $X\leq Y$, la variable aléatoire $Y-X$ est positive, donc par linéarité de l'espérance,

  $E(Y-X)=E(Y)-E(X)\geq 0$, ce qui nous donne l'inégalité voulue.
- $-|X|\leq X\leq|X|$ donc par croissance de l'espérance :
  $E(-|X|)\leq E(X)\leq E(|X|)\Leftrightarrow -E(|X|)\leq E(X)\leq E(|X|)\Leftrightarrow |E(X)|\leq E(|X|)$
- Cette variable aléatoire prend comme unique valeur a, avec une probabilité égale à 1 donc $E(X)=a\times 1=a$.

Exemple : On lance successivement 100 dés équilibrés à six faces. On note X la somme des résultats obtenus. Notons X_i la variable aléatoire donnant le résultat du lancer du dé numéro i.

Alors $X=X_1+X_2+\ldots+X_{100}$. Comme $E(X_i)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k=\frac{1}{6}\times\frac{6\times 7}{2}=3,5$ (indépendant de i)

on a $E(X)=E\left(\sum_{k=1}^{100}X_k\right)=\sum_{k=1}^{100}E(X_k)=100\times E(X_1)=100\times 3,5=350$

Définition

Soit A un événement inclus dans notre univers Ω. La **variable indicatrice** de l'événement A, notée 1_A, est la variable aléatoire définie par : $1_A(\omega)=1$ si $\omega\in A$, et $1_A(\omega)=0$ sinon.

Propriété

L'espérance de la variable aléatoire indicatrice 1_A vaut $P(A)$.

Démonstration : La loi de 1_A est extrêmement simple, elle prend la valeur 1 si $\omega\in A$, c'est-à-dire avec probabilité $P(A)$, et 0 sinon, donc avec probabilité $1-P(A)$. L'espérance vaut donc bien $P(A)$.