MPSI2

Variables aléatoires - exercices

Exercice 1 On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

X prend ses valeurs dans $\{1\ldots,6\}$.

Par hypothèse, il existe un réel a tel que $P(X=k)=ka$. Maintenant, puisque P_X est une loi de probabilité, on a : $6\sum_{k=1}^{6} P(X=k)=1 \Leftrightarrow a\times\sum_{k=1}^{6} k = a\times\frac{6\times 7}{2}=21a \Leftrightarrow a=\frac{1}{21}$.

On a donc : $E(X)=\sum_{k=1}^{6} kP(X=k)=a\sum_{k=1}^{6} k^2 = a\frac{6\times 7\times 13}{6}=\frac{7\times 13}{21}=\frac{13}{3}$

2. On pose $Y=\frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

On a $(X=k)\Leftrightarrow Y=\frac{1}{k}$. Y prend donc ses valeurs dans $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}\right\}$, et la loi est donnée par :

valeurs de k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	total
valeurs de $P(Y=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

Et alors : $E(Y)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k}\times ak = 6\times a=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$.

Attention ! ce n'est pas parce que $Y=\frac{1}{X}$ que $E(Y)=\frac{1}{E(X)}$!!!

Exercice 2 Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

On note A_k l'aire de la couronne k, et A l'aire totale.

Par les hypothèses d'équiprobabilité faites dans l'énoncé, on a :

$P(X=k)=\frac{A_k}{A}$ pour k compris entre 1 et 10.

Pour la couronne k, le cercle extérieur est de rayon $11-k$ et le cercle intérieur de rayon $10-k$ (un petit dessin pourra aider pour faire attention à l'inversion entre l'ordre des cercles et les rayons, et il faut aussi bien faire attention à ce que pour $k=1$, c'est $11-k=10$ qui donne le rayon de la cible).

On a donc, en cm², $A_k=\pi((11-k)^2-(10-k)^2)=\pi(21-2k)$.

On en déduit que $P(X=k)=\frac{21-2k}{100}$.

2. Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Notons Y la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

Y prend ses valeurs dans $\{-2,6,7,8,9,10\}$.

L'événement « $Y = -2$ » est égal à l'événement « $X \leq 5$ », et donc :

$P(Y=-2) = \sum_{k=1}^{5} P(X=k) = \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{21}{100} - \frac{k}{50}\right) = \frac{21}{100} \sum_{k=1}^{5} 1 - \frac{1}{50} \sum_{k=1}^{5} k = \frac{21 \times 5}{100} - \frac{1}{50} \times \frac{5 \times 6}{2} = \frac{21-6}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

D'autre part, pour $k \in \{6, \ldots, 10\}$, on a $P(Y=k) = P(X=k)$.

On en déduit le calcul de l'espérance de Y :

$E(Y) = -2 \times \frac{3}{4} + \sum_{k=6}^{10} k \times \frac{21-2k}{100} = -\frac{3}{2} + \frac{21}{100} \times \sum_{k=6}^{10} k - \frac{1}{50} \sum_{k=6}^{10} k^2 = -\frac{3}{2} + \frac{21}{100}\left(\frac{10 \times 11}{2} - \frac{5 \times 6}{2}\right) - \frac{1}{50}\left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{5 \times 6 \times 11}{6}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{21}{100} \times 5 \times 8 - \frac{1}{50} \times 5 \times 11 \times 6 = -\frac{3}{2} + \frac{42}{5} - \frac{33}{5} = -\frac{15}{10} + \frac{18}{5} = \frac{3}{10}$.

L'espérance est positive. Le jeu est favorable au joueur.

En moyenne, il peut espérer gagne 0,3 euros par partie.