MPSI2

Probabilités - exercices

Exercice 1

1. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
   Démontrer que : $\max\left(0, P(A)+P(B)-1\right) \leq P(A\cap B) \leq \min\left(P(A), P(B)\right)$.
2. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements avec $n \geq 2$.
   Démontrer que : $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1)$. (Inégalité de Bonferroni)

On a $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leqslant P(A)$ et de même $P(A \cap B) \leqslant P(B)$ donc

$$P(A \cap B) \leqslant \min \{P(A), P(B)\}$$

Bien évidemment $P(A \cap B) \geqslant 0$. De plus $P(A \cup B) \leqslant 1$ or

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

donc

$$P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

puis

$$\max \{0, P(A) + P(B) - 1\} \leqslant P(A \cap B)$$

On va procéder par récurrence sur n, le point clé étant la formule

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

La propriété est vraie si $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A = A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ et $B = A_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Exercice 2 Soit (Ω, P) un espace probabilisé, et $A_1, \dots, A_n$ des événements.

Démontrer que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \min_{1\leq k\leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq k}} P(A_i \cap A_k)\right).$

Il s'agit de prouver que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} P(A_i \cap A_k).$$

Par symétrie, on peut supposer que $k = n$. Pour $i = 1, \dots, n-1$, on a

$$P(A_i) - P(A_i \cap A_n) = P(A_i \backslash A_n)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \cap A_n) &= P(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(P(A_i) - P(A_i \cap A_n)\right) \\
&= P(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \backslash A_n) \\
&\geq P\left(A_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \backslash A_n)\right).
\end{aligned}$$

Or,

$$A_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \backslash A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

et donc

$$P\left(A_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \backslash A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 4 Dans une tombola, 1 000 billets sont mis en vente, et deux billets sont gagnants. Combien faut-il acheter de billets pour avoir une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ d'avoir au moins un billet gagnant ?

Notons n le nombre de billets achetés. On cherche la probabilité p_n de l'événement "au moins un des billets achetés est gagnant". Bien sûr, c'est la propriété de l'événement complémentaire "aucun des billets achetés n'est gagnant" que l'on va calculer. Il y a $\binom{1000}{n}$ choix possibles d'achats de billets et $\binom{998}{n}$ choix qui amènent à aucun billet gagnant. On a donc

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - \frac{\binom{998}{n}}{\binom{1000}{n}} \\ &= 1 - \frac{(1000-n)(999-n)}{1000 \times 999}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} p_n \geq 1/2 &\iff \frac{(1000-n)(999-n)}{1000 \times 999} \leq 1/2 \\ &\iff n^2 - 1999n + 500 \times 999 \leq 0. \end{aligned}$$

Le calcul des racines de ce polynôme montre que l'une des racines est comprise entre 292 et 293 et l'autre est supérieure à 1000. Le polynôme est négatif entre ces deux racines, et il faut donc acheter au moins 293 billets.

Exercice 5 Pour organiser une coupe, on organise un tirage au sort qui réunit n équipes de basket-ball de 1^e division et n équipes de 2^e division, de sorte que chaque équipe joue un match, et un seul.

1. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de 1^e division à une équipe de 2^e division.
2. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leq \dbinom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n \to \infty} q_n$.

1. On va dénombrer les tirages au sort en tenant compte de l'ordre des matchs dans le tirage (c'est-à-dire que si l'on a 4 équipes A,B,C et D, les tirages (A-B,C-D) et (C-D,A-B) sont comptés comme deux tirages différents car ils n'ont pas le même premier match). On pourrait faire sans cette convention, on obtiendrait les mêmes résultats mais cela changerait un peu la façon de faire. Un tirage au sort se présente donc comme une $n-$liste de matchs, c'est-à-dire une $n-$liste de combinaisons 2 à 2 disjointes. Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de choisir la première combinaison. Puis, cette combinaison choisie, il y a encore $\binom{2n-2}{2}$ façons de choisir la combinaison suivante. Et ainsi de suite... Ainsi, le nombre total de tirages au sort est :

$$\binom{2n}{2}\times\binom{2n-2}{2}\times\dots\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2n)!}{2^n}.$$

Parmi ces tirages, comptons ceux qui ne font s'opposer que des équipes de division distinctes. Pour le premier match, il y a n façons de choisir l'équipe de première division, et n façons de choisir l'équipe de deuxième division, soit n^2 choix. Pour le second match, il reste à choisir parmi $n-1$ équipes, et donc on a $(n-1)^2$ choix. Finalement, on obtient :

$$p_n=\frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^n}}=\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

2. D'abord, si n est impair, un tel tirage au sort est clairement impossible, et $q_n=0$. On suppose donc que n est pair et s'écrit $2k$. On choisit d'abord les k matchs parmi $2k$ qui opposent les matchs de 1ère division entre eux : cela fait $\binom{2k}{k}$ choix. Une fois ce choix réalisé, il faut compter le nombre de tirages à l'intérieur entre équipes de 1ère division. De la même façon que lorsqu'on a compté le nombre total de tirages au sort, on trouve $\frac{(2k)!}{2^k}$. De même pour les tirages au sort entre équipes de 2è division. On a donc :

$$q_{2k}=\frac{2^{2k}}{(4k)!}\times\binom{2k}{k}\times\left(\frac{(2k)!}{2^k}\right)^2=\frac{\binom{2k}{k}}{\binom{4k}{2k}}.$$

3. Ecrivons que :

$$(2n)! = 2^n(2n-1)(2n-3)\dots 3\times 1\times n!.$$

On a donc :

$$\binom{2n}{n} = 2^n\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3\times 1}{n!}.$$

Maintenant, en utilisant l'encadrement $2n-k-1\leq 2n-k\leq 2n-k+1$, on obtient

$$2^n\frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4\times 2}{n!}\leq\binom{2n}{n}\leq 2^n\frac{2n(2n-2)\dots 4\times 2}{n!}$$

qui donne finalement le résultat demandé.
4. On a donc :

$$0\leq p_n\leq\frac{n}{2^{n-1}},$$

qui prouve que p_n tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. De même pour q_n...

Exercice 6 Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in]0,1[$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in]0,1[$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
3. A quelle condition le jeu est-il équilibré ?

1. Notons A_k l'événement "A gagne la k-ième partie" et B_k l'événement "B gagne la k-ième partie". L'événement "ni A ni B ne gagne" est égal à $\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{2n-1}}\cap\overline{B_{2n}}$. Ces événements étant indépendants, la probabilité recherchée vaut $(1-a)^n(1-b)^n$.

2. L'événement "A gagne" est égal à la réunion des événements suivants : A_1, $\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap A_3$, ..., $\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_{2n-2}}\cap A_{2n-1}$. Maintenant, on a

$$P(\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_{2k-2}}\cap A_{2k-1})=(1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a$$

et donc la probabilité que A gagne vaut

$$a\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)^k(1-b)^k=a\times\frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{a+b-ab}.$$

On peut fait un calcul similaire ou utiliser le fait que

$$P(A\,\text{gagne})+P(B\,\text{gagne})+P(\text{match nul})=1$$

pour démontrer que

$$P(B\,\text{gagne})=b(1-a)\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)^k(1-b)^k=b(1-a)\times\frac{1-(1-a)^n(1-b)^n}{a+b-ab}.$$

3. Le jeu est équilibré si et seulement si A et B ont la même probabilité de gagner, c'est-à-dire si et seulement si $a=b(1-a)$.

Exercice 7 Soit $(\Omega, ,\mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$.

Supposons d'abord que $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$. En particulier, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_A(A) = 1$. Ainsi, A doit être un événement presque sûr.
Réciproquement, si on suppose que $\mathbb{P}(A) = 1$, alors pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Maintenant, on sait que

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B).$$

Mais puisque $\bar{A} \cap B \subset \bar{A}$ et que $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B).$$

Ainsi, $\mathbb{P}_A = \mathbb{P}$ si et seulement si A est un événement presque sûr.

Exercice 8 Soient A, B, C trois évènements avec $P(B \cap C) > 0$. Vérifier $P(A|B \cap C)P(B|C) = P(A \cap B|C)$.

Exercice 8 Soient A, B, C trois évènements avec $P(B \cap C) > 0$. Vérifier $P(A|B \cap C)P(B|C) = P(A \cap B|C)$.

On a

$$P(A \mid B \cap C)P(B \mid C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B \mid C)$$

Exercice 10 Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage ?
2. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

1. Distinguons les boules et ordonnons les tirages. Il y a $10 \times 9 \times 8$ tirages possibles. Calculons maintenant le nombre de tirages comprenant au moins une boule noire. Il y a deux possibilités :

- Le tirage ne comporte qu'une seule boule noire. Il y a 3 façons de choisir la position de la boule noire (lors du premier tirage, du deuxième, etc...), 2 choix pour cette boule, et ensuite 8×7 choix pour les deux boules blanches. En tout, il y a donc $3 \times 2 \times 8 \times 7$ tirages correspondants.
- Le tirage comporte les deux boules noires. On choisit d'abord les deux tirages où on a pris les boules noires : on choisit 2 places parmi 3, soit $\binom{3}{2} = 3$. Ce choix fait, il y a 2 choix pour les boules noires, et 8 choix pour les boules blanches. Il y a donc en tout $3 \times 2 \times 8$ tels tirages.

Le nombre total de tirages est donc $6 \times 8 \times 8$ et si on note B l'événement "Au moins une boule noire figure dans le tirage", alors la probabilité de B est égale à

$$P(B) = \frac{6 \times 8 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{8}{15}.$$

Remarquons que, comme souvent dans ce type d'exercice, il est plus facile de déterminer la probabilité du complémentaire : en effet, $\overline{B}$ est l'événement "on ne tire que des boules blanches". Le nombre de tirages correspondant est $8 \times 7 \times 6$ et donc

$$P(\overline{B}) = \frac{8 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7 \times 6}{10 \times 9} = \frac{7}{15}$$

ce qui est bien la valeur attendue (ouf)!

2. Le dénombrement du nombre de tirages tels que la première boule soit noire est plus simple. Il y a exactement $2 \times 9 \times 8$ tirages. Si A est l'événement : "La première boule tirée est noire", alors

$$P(A) = \frac{2 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}.$$

On cherche $P(A|B)$. Par définition,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{8}$$

puisque $A \subset B$.

Exercice 9 Une urne contient n boules noires et n boules blanches que l'on tire une à une sans remise. Calculer la probabilité que l'on tire à chaque fois une boule de couleur différente de la précédente.

Pour $k=1,\dots,2n$, notons B_k l'événement "la k-ième boule tirée est blanche" et $N_k=\overline{B_k}$ l'événement contraire "la k-ième boule tirée est noire". Posons de plus

$$\begin{aligned} A &= N_{2n}\cap B_{2n-1}\cap N_{2n-2}\cap\dots\cap N_2\cap B_1\\ A' &= B_{2n}\cap N_{2n-1}\cap B_{2n-2}\cap\dots\cap B_2\cap N_1. \end{aligned}$$

Un tirage où l'on tire à chaque fois une boule différente de la précédente étant entièrement déterminé par la première boule tirée, on cherche $P(A\cup A')$. Puisque A et A' sont incompatibles, on a $P(A\cup A')=P(A)+P(A')=2P(A)$, par symétrie du rôle joué par les boules blanches et noires. Reste à calculer $P(A)$, ce que l'on fait par la formule des probabilités composées :

$$P(A)=P(N_{2n}|B_{2n-1}\cap\dots\cap N_2\cap B_1)P(B_{2n-1}|N_{2n-2}\cap\dots\cap N_2\cap B_1)\cdots P(N_2|B_1)P(B_1).$$

Calculons $P(N_{2k}|B_{2k-1}\cap\dots\cap N_2\cap B_1)$. Si $B_1,N_2,\dots,B_{2k-1}$ sont réalisés, il reste dans l'urne $n-k$ boules blanches et $n-(k-1)$ boules noires. On a donc

$$P(N_{2k}|B_{2k-1}\cap\dots\cap N_2\cap B_1)=\frac{n-k+1}{2n-2k+1}.$$

Calculons ensuite $P(B_{2k-1}|N_{2k-2}\cap\dots\cap N_2\cap B_1)$. Si $B_1,N_2,\dots,N_{2k-2}$ sont réalisés, il reste dans l'urne autant de boules noires que de boules blanches, et donc

$$P(B_{2k-1}|N_{2k-2}\cap\dots\cap N_2\cap B_1)=\frac{1}{2}.$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^n\times\frac{n-k+1}{2k-1}\\ &= \frac{1}{2^n}\times\frac{n!}{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}\\ &\frac{1}{2^n}\times\frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n)!}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Finalement, la probabilité que l'on tire à chaque fois une boule différente de la précédente vaut $\frac{2(n!)^2}{(2n)!}$.

Exercice 11 Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé le n-ième jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,3 ; mais si elle a fumé le n-ième jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0,9. Pour $n \geq 0$, on note F_n l'événement "la personne fume le n-ième jour" et p_n la probabilité de F_n. En particulier on a $p_0 = 1$.

1. Démontrer que $p_{n+1} = -0{,}6p_n + 0{,}7$.
2. La personne va-t-elle s'arrêter de fumer ?

1. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F_{n+1}) = P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n}).$$

L'énoncé nous dit que

$$P_{F_n}(\overline{F_{n+1}}) = 0{,}9 \text{ et } P_{\overline{F_n}}(\overline{F_{n+1}}) = 0{,}3$$

d'ou

$$P_{F_n}(F_{n+1}) = 0{,}1 \text{ et } P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = 0{,}7.$$

On a donc

$$p_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}7(1 - p_n) = -0{,}6p_n + 0{,}7.$$

2. On a une suite arithmético-géométrique. L'équation $\ell = -0{,}6\ell + 0{,}7$ donne $\ell = 7/16$. La suite (q_n) définie par $q_n = p_n - \ell$ est une suite géométrique de raison $-0{,}6$, elle converge vers 0, et donc (p_n) tend vers $7/16$. La probabilité que la personne fume le n-ième jour tend vers $7/16$. Elle ne va pas s'arrêter de fumer!

Exercice 12 On tire successivement 3 boules dans une urne contenant 6 boules blanches et 4 boules noires. Quelle est la probabilité que la 3e boule tirée soit blanche ?

Introduisons les 3 événements suivants : A_0 ="les deux premières boules tirées sont noires", A_1 ="les deux premières boules tirées contiennent une blanche et une noire" et A_2 ="les deux premières boules tirées sont blanches. Introduisons aussi B_i l'événement : "la i-ème boule tirée est blanche". On cherche $P(B_3)$, et comme A_0, A_1, A_2 forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$P(B_3) = P(B_3|A_0)P(A_0) + P(B_3|A_1)P(A_1) + P(B_3|A_2)P(A_2).$$

On a $P(B_3|A_0) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ (si on a tiré deux boules noires, il reste 6 boules blanches et deux boules noires dans l'urne), puis $P(B_3|A_1) = \frac{5}{8}$ et $P(B_3|A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Reste à calculer les $P(A_i)$. On a $A_2 = B_1 \cap B_2$ et donc, par la formule des probabilités composées,

$$P(A_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{5}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$P(A_0) = P(\overline{B_2}|\overline{B_1})P(\overline{B_1}) = \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{15}.$$

Reste à calculer A_1. On peut tout simplement remarquer que

$$P(A_1) = 1 - P(A_0) - P(A_2) = \frac{8}{15}.$$

Finalement,

$$P(B_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{15} + \frac{5}{8} \times \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5}.$$

Bien sûr, on aurait aussi pu faire un arbre de probabilités à 3 niveaux pour répondre à cet exercice.

Exercice 13 On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n pour que ce dé soit pipé. Interpréter le résultat.

1. Notons T l'événement : ``le dé est pipé'' et $C$ l'événement ``le lancer amène un 6''. On cherche $P_C(T)$. On va calculer cette probabilité en utilisant la formule de Bayes. En effet, $(T,\bar T)$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, avec $P(T)=25/100=1/4$ et $P(\bar T)=1-P(T)=3/4$. L'énoncé nous dit aussi que $P_T(C)=1/2$ et bien sûr $P_{\bar T}(C)=1/6$. La formule de Bayes donne alors

$$\begin{aligned}P_C(T)&=\frac{P(T)P_T(C)}{P_T(C)P(T)+P_{\bar T}(C)P(\bar T)}\\&=\frac{\frac14\times\frac12}{\frac12\times\frac14+\frac16\times\frac34}\\&=\frac12.\end{aligned}$$

2. Introduisons les événements C_k définis par ``le k-ième lancer amène un 6'' et $D=\bigcap_{k=1}^n C_k$. Nous cherchons $P_D(T)$ que l'on calcule toujours par la formule de Bayes. Il faut juste remarquer que maintenant, par indépendance des événements C_k, $P_T(D)=(1/2)^n$ et $P_{\bar T}(D)=(1/6)^n$. On trouve donc :

$$\begin{aligned}P_D(T)&=\frac{P(T)P_T(D)}{P_T(D)P(T)+P_{\bar T}(D)P(\bar T)}\\&=\frac{\frac14\times\left(\frac12\right)^n}{\left(\frac12\right)^n\times\frac14+\left(\frac16\right)^n\times\frac34}\\&=\frac{1}{1+3^{-n+1}}.\end{aligned}$$

En particulier, (p_n) tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, ce qui est conforme à l'intuition : plus n est grand, plus le dé est très certainement pipé.

Exercice 14 Soit $N \geq 2$ et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. Un joueur qui dispose d'une somme de k euros, avec $k \in [0, N]$, joue à un jeu de pile ou face avec les règles suivantes. Il lance successivement une pièce de monnaie. A chaque lancer, avec probabilité p, la pièce tombe sur pile et le joueur gagne 1 euro ; et avec probabilité q, la pièce tombe sur face et le joueur perd 1 euro. Le jeu s'arrête lorsque le joueur possède N euros ou lorsqu'il est ruiné. On note p_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné s'il possède la somme de k euros au départ.

1. Déterminer p_0, p_N.
2. Démontrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, on a $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$.
3. En déduire la valeur de p_k pour $k \in \{0, \ldots, N\}$.

1. On a $p_0 = 1$ et $p_N = 0$.
2. On note P_1 l'événement : "le premier lancer donne pile" et E l'événement : "le joueur est ruiné". Puisque $\{P_1, \overline{P_1}\}$ est un système complet d'événements, on a

$$P(E) = P(E|P_1)P(P_1) + P(E|\overline{P_1})P(\overline{P_1}) = pP(E|P_1) + qP(E|\overline{P_1}).$$

Si P_1 est réalisé, le joueur dispose après le premier lancer d'une somme de $k+1$ euros. La probabilité qu'il soit ruiné est donc égale à la probabilité qu'un joueur disposant d'une somme initiale de $k+1$ euros soit ruiné. De même, si $\overline{P_1}$ est réalisé, le joueur dispose après le premier lancer d'une somme de $k-1$ euros, la probabilité qu'il soit ruiné est donc égale à la probabilité qu'un joueur disposant d'une somme initiale de $k+1$ euros soit ruiné. On a donc

$$P(E) = pp_{k+1} + qp_{k-1}.$$

3. Si on réécrit cette relation sous la forme

$$p_{k+1} = \frac{1}{p} p_k - \frac{q}{p} p_{k-1},$$

on reconnaît une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est

$$r^2 - \frac{1}{p} r + \frac{q}{p} = 0.$$

Si $p \neq 1/2$ et donc $p \neq q$, cette équation admet deux racines distinctes qui sont 1 et $\frac{q}{p}$ et donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, on a

$$p_k = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p} \right)^k.$$

Utilisant les valeurs de p_0 et p_N, on a le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & 1 \\ \alpha + \beta \left(\frac{q}{p} \right)^N & = & 0. \end{cases}$$

Finalement, après résoluton du système, on trouve

$$p_k = \frac{\left(\frac{q}{p} \right)^k - \left(\frac{q}{p} \right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^N}.$$

Lorsque $p = q = 1/2$, l'équation caractéristique admet 1 pour racine double, et il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, on a

$$p_k = \alpha + \beta k.$$

En utilisant la même technique de résolution, on trouve finalement

$$u_k = 1 - \frac{k}{N}.$$